अध्याय 1

संख्याओं की समझ

1.1 भाग (अ) में हमने पाँच अंकों तक संख्याओं को लिखना, पढ़ना एवं उनकी तुलना करना सीखा। अब हम बड़ी संख्याओं का अध्ययन करेंगे।

पाँच अंकों की सबसे बड़ी संख्या = 99999 है यदि इसमें 1 और जोड़ दिया जाए तो क्या आप बता सकते है कि अगली संख्या कौनसी होगी ?

अगली संख्या = 100000 = एक लाख (छः अंकों की सबसे छोटी संख्या)

245342 – इसे दो लाख पैंतालिस हजार तीन सौ बयालिस पढ़ेंगे। पुनः लाख के पश्चात अगला अंक दस लाख तथा उसके बाद करोड़ आता है।

संख्या (अंकों में)	**संख्या (शब्दों में)**
1524504	पन्द्रह लाख चौबीस हजार पाँच सौ चार
2015315	बीस लाख पन्द्रह हजार तीन सौ पन्द्रह
43512405	चार करोड़ पैंतीस लाख बारह हजार चार सौ पाँच

आईए, तालिका के द्वारा संख्याओं को पढ़ना सीखें –

संख्या (अंकों में)	करोड़	दस लाख	लाख	दस हजार	हजार	सैकड़ा	दहाई	इकाई	संख्या (शब्दों में)
3,52,027	–	–	3	5	2	0	2	7	तीन लाख बावन हजार सत्ताइस
2,43,596									
57,68,423	–	5	7	6	8	4	2	3	सत्तावन लाख अड़सठ हजार चार सौ तेइस
32,05004									
4,53,30,670	4	5	3	3	0	6	7	0	चार करोड तिरपन लाख तीस हजार छः सौ सत्तर
9,09,09,009									

1.2 संख्यांकन पद्धति

1.2.1 भारतीय संख्यांकन पद्धति

संख्यांकन की भारतीय पद्धति में हम इकाई, दहाई, सैंकड़ा, हजार का प्रयोग करते हैं तथा आगे लाख और करोड़ का प्रयोग करते हैं। हजार, लाख और करोड़ वाली संख्या को प्रदर्शित करने के लिए उनके बीच अल्पविरामों का प्रयोग किया जाता है। पहला अल्पविराम सौ के स्थान (दाएँ से बाएँ चलते हुए तीसरे अंक) के बाद आता है और हजार को प्रदर्शित करता है। दूसरा अल्पविराम अगले दो अंकों (दाएँ से पाँचवें अंक) के बाद आता है और लाख को प्रदर्शित करता है। तीसरा अल्पविराम अगले दो अंकों (दाएँ से सातवें अंक) के बाद आता है करोड़ को प्रदर्शित करता है।

1 दहाई	=	10 इकाईयाँ
1 सैंकड़ा	=	10 दहाईयाँ
	=	100 इकाईयाँ
1 हजार	=	10 सैंकड़ा
	=	100 दहाईयाँ
1 लाख	=	100 हजार
	=	1000 सैंकड़ा
1 करोड़	=	100 लाख
	=	10,000 हजार

1.2.2 अंतर्राष्ट्रीय संख्यांकन पद्धति

संख्यांकन की अंतर्राष्ट्रीय पद्धति में इकाई, दहाई, सैंकड़ा, हजार और आगे मिलियन का प्रयोग किया जाता है। हजार और आगे मिलियन को प्रदर्शित करने के लिए अल्पविरामों का प्रयोग किया जाता है। अल्पविराम दाएँ से बाएँ प्रत्येक तीसरे अंक के बाद आता है। पहला अल्पविराम हजार को प्रदर्शित करता है और दूसरा अल्पविराम मिलियन को प्रदर्शित करता है।

सोचें ! – कितने लाख से एक मिलियन बनता है ?

पाँच बड़ी संख्याओं को लीजिए। इन्हें भारतीय और अंतर्राष्ट्रीय दोनों संख्यांकन पद्धतियों में व्यक्त कीजिए।

1.3 अलग–अलग लिपि में संख्याएँ

हिन्दू अरेबिक अंक	देवनागरी अंक	रोमन अंक
1	१	I
2	२	II
3	३	III
4	४	IV
5	५	V
6	६	VI
7	७	VII
8	८	VIII
9	९	IX
10	१०	X
11	११	XI
12	१२	XII
13	१३	XIII
14	१४	XIV
15	१५	XV

रोमन पद्धति में बड़ी संख्याओं को इस प्रकार व्यक्त करते है :

संख्याएँ	20	30	50	100	500	1000
रोमन पद्धति में	XX	XXX	L	C	D	M

(i) किसी भी संकेत की पुनरावृत्ति होने पर वह जितनी बार आता है। उसका मान उतनी ही बार जोड़ दिया जाता है।

(ii) किसी भी संकेत की पुनरावृत्ति तीन से अधिक बार नहीं की जाती है। संकेत V, L व D की कभी पुनरावृत्ति नहीं होती है।

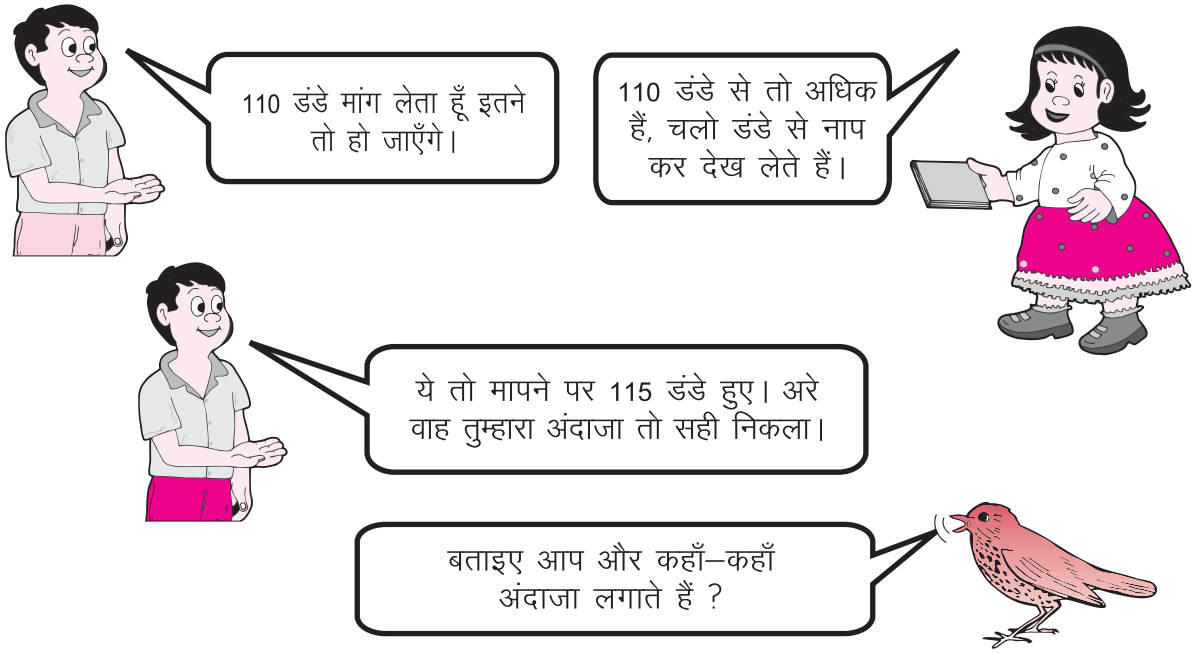
(iii) यदि छोटे मान वाला कोई संकेत एक बड़े मान वाले संकेत के दाई और लग जाता है तो बड़े मान में छोटे मान को जोड़ दिया जाता है।

(iv) यदि छोटे मान वाला कोई संकेत एक बड़े मान वाले संकेत के बाईं ओर लग जाता है तो बड़े मान में से छोटे मान को घटा दिया जाता है।

(v) संकेत V, L और D मानों को कभी भी घटाया नहीं जाता है। संकेत I को केवल V और X में से घटाया जा सकता है। संकेत X को केवल L, M व C में से ही घटाया जा सकता है।

1.4 अनुमान

मितेश, मनाली, देवांश और चार्वी गिल्ली डंडा का खेल खेल रहे हैं। मितेश और मनाली एक टीम में हैं तथा देवांश और चार्वी दूसरी टीम में हैं। मितेश ने डंडे से गिल्ली को मारा। मितेश और उसके साथी ने गिल्ली और गच्च (गुप्पी) के बीच की दूरी का अंदाजा लगाया।



अपनी मुट्ठी में अलग–अलग चीजें (गेहूँ, मक्का, सोयाबीन, कंकड़ आदि) लेकर अपने साथी से उसकी संख्या का अंदाजा लगवाएँ। इसे गिनकर देखिए।

कक्षा के बच्चों से चार–चार का समूह बनवाइए और उनके वजन का अनुमान दी गई तालिका में भरवाइए। वजन नापने वाली मशीन से बच्चों का वजन कीजिए।

क्र.सं.	छात्र/छात्रा का नाम	अनुमानित वजन	वास्तविक वजन
1			
2			
3			
4			

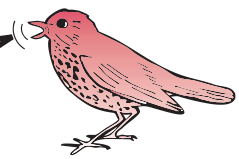
अनुमान लगाइए और बताइए कि –

- तुम्हारे घर से विद्यालय की अनुमानित दूरी ..... मीटर/ किमी है।
- कक्षा कक्ष की अनुमानित लम्बाई ..... फीट, चौड़ाई ..... फीट है।
- पुस्तकालय में पुस्तकों की अनुमानित संख्या ..... है।

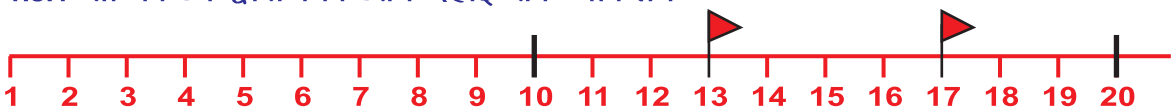
1.5 सन्निकटन

आप अपने घर पर बड़े भाई या बहिन की शादी के कार्यक्रम की कल्पना कीजिए। हम सबसे पहले यह पता लगाएँगे कि हमारे घर पर कितने मेहमान आ सकते हैं। आने वाले मेहमानों की संख्या का पता क्या हम ठीक (Exact) लगा सकते हैं ? व्यवहारिक रूप से सम्भव नहीं है।

उन स्थितियों के बारे में सोचिए, जहाँ हम केवल एक सन्निकट आकलित संख्या से काम चलाते हैं और जहाँ हमें ठीक–ठीक संख्या की आवश्यकता पड़ती है।

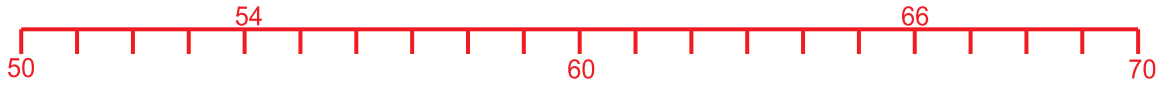


1.5.1 सन्निकटन द्वारा निकटतम दहाई तक आकलन



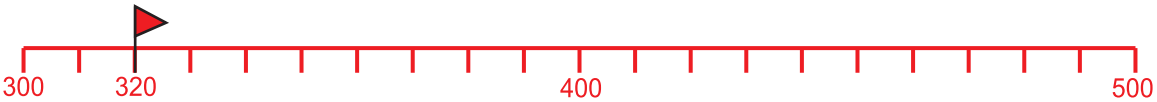
- कौनसा झंडा 10 के नजदीक है ?
- कौनसा झंडा 20 के नजदीक है ?
- संख्या 13 संख्या 10 और 20 के बीच में है परंतु 13 संख्या 10 के अधिक पास है। इसलिए हम 13 को निकटतम दहाई तक 10 के रूप में सन्निकटन करते हैं।
- सन्निकटन करते हुए हम देखते हैं कि संख्या 1,2,3,4 संख्या 10 की तुलना में संख्या 0 के अधिक पास में है। इसलिए हम इन्हें 0 के रूप में सन्निकटन करते हैं और संख्या 6,7,8,9 संख्या 10 के अधिक पास है इसलिए हम इनका 10 के रूप में सनिनकटन करते हैं। जैसे 23 को 20 तथा 57 को 60 लिखते हैं।
- संख्या 5 संख्या 0 और 10 से बराबर दूरी पर है। सामान्य रूप में संख्या 5 को संख्या 10 के रूप में सन्निकटन करते हैं।

संख्या रेखा पर लिखी संख्या का सन्निकटन कैसे करेंगे ?



1.5.2 निकटतम सैंकड़े तक सन्निकटन

संख्या रेखा पर झंडे वाली संख्या 320 के बारे में सोचिए। यह किसके नजदीक है ?



संख्या 320 संख्या 300 के नजदीक है। इसलिए संख्या 320 का सैंकड़ा तक सन्निकटन 300 के रूप में किया जाता है।

संख्या 5437 का सन्निकटन दहाई तक करने के लिए हम इसके इकाई वाले स्थान के अंक पर ध्यान देंगे। वह 5 से बड़ा है इसलिए 5437 का दहाई तक सन्निकटन 5440 के रूप में किया जाता है। साथ ही

5437 का सैंकड़े तक सन्निकटन करने के लिए दहाई का अंक देखना होगा। दहाई पर 3 अंक 5 से छोटा है। इसलिए वह 400 के नजदीक है और संख्या 5437 का सन्निकटन 5400 के रूप में किया जाता है।

इन्हें समझें

48 का दहाई तक	–	50
682 का सैंकड़े तक	–	700
335 का सैंकड़े तक	–	300
2907 का सैंकड़े तक	–	2900

1.6 कोष्ठक की समझ

जागृति बाजार से 5 कॉपियाँ खरीद कर लाई जिसका मूल्य प्रतिकॉपी 10 रुपये था और उसकी सहेली हिमानी उतने ही मूल्य वाली 9 कॉपियाँ लाई। दोनों ने मिलकर कितने रुपये चुकाए ?

जागृति ने बताया $= 5 \times 10 + 9 \times 10$	हिमानी ने बताया $= 5 + 9 \times 10$
$= 50 + 90$	$= 5 + 90$
$= 140$ रूपये	$= 95$ रूपये

बताइए किसका हिसाब गलत है ?

अध्यापिका – ऐसी उलझन दूर करने के लिए कोष्ठक का प्रयोग किया जाता है।

हिमानी ने जो हल किया है उसमें 5 तथा 9 को कोष्ठक में लिख कर एक संख्या बना लेते हैं और फिर बाहर दी गई संक्रियाएँ करते हैं। जैसे –

$(5 + 9) = 14$

$14 \times 10 = 140$

कोष्ठकों का प्रयोग यह स्पष्ट रूप से बताता है कि पहले कोष्ठक ( ) के अंदर दी गई संख्याओं को हल करते हैं और फिर बाहर वाली संक्रिया करते हैं।

जैसे $(5 + 9) \times 10$

$= 14 \times 10$

$= 140$

याद रखने योग्य

9 + 1 = 10	10 × 10 = 100
99 + 1 = 100	100 × 10 = 1000
999 + 1 = ...	1000 × 10 = 10,000
9999 + 1 = ...	10,000 × 10 = 1,00,000
99999 + 1 = ...	1,00,000 × 10 = 10,00,000
999999 + 1 = ...	10,00,000 × 10 = 1,00,00,000
9999999 + 1 = 1,00,00,000	

प्रश्नावली 1

1. निम्नलिखित संख्या समूह में सबसे बड़ी संख्या पर गोल घेरा (❍) एवं सबसे छोटी संख्या पर क्रॉस (✕) का चिह्न लगाइए ।

(i)	4536,	4892,	4370	4452
(ii)	64,905	64,509,	64,009	64,005
(iii)	879,303	893703,	803973,	873903
(iv)	68558008,	89897708,	39987989	

2. 3, 7 एवं 9 से बनी पाँच अंकों की सबसे बड़ी एवं सबसे छोटी संख्या लिखिए। जिसमें इन तीनों अंक का आना आवश्यक है।

3. निम्नलिखित को संख्यांकों के रूप में लिखिए।

   (i) नौ लाख उनासी हजार नौ

   (ii) अड़सठ लाख नवासी हजार अड़सठ

   (iii) पाँच करोड़ सत्ताइस लाख बत्तीस हजार तीन सौ दो

4. निम्नलिखित संख्यांको की तुलना बॉक्स में <, > और = का चिह्न लगाकर कीजिए।

(i)	7227027	☐	7272027
(ii)	5150051	☐	5105051
(iii)	79779907	☐	79779907
(iv)	22332332	☐	22332233

अध्याय 2

रिश्ते संख्याओं के

2.1. गुणनखंड एवं गुणज

किसी भी संख्या के गुणनखंड या अपवर्तक वे संख्याएँ है जो उस संख्या को पूर्णतः विभाजित करती है।

जैसे– $15 = 1 \times 15$

$= 3 \times 5$

यहाँ 1, 3, 5 व 15 ऐसी संख्याएँ है जिनका पूरा–पूरा भाग 15 में जाता है। अतः 1, 3, 5, व 15 संख्या 15 के गुणनखंड या अपवर्तक है तथा 15 संख्या 1, 3, 5 व 15 का एक गुणज या अपवर्त्य है। अर्थात् 1, 3, 5 व 15 के पहाड़े में 15 आता है।

नीचे दी गई संख्याओं के सामने उनके गुणनखंड लिखिए –

संख्या	गुणनखंड
8	1, 2, 4, 8
12	———————
17	———————
20	———————
23	———————

★ 1 (एक) प्रत्येक संख्या का गुणनखंड होता है तथा प्रत्येक संख्या स्वयं का एक गुणनखंड होती है।

2.2. भाज्य और अभाज्य संख्याएँ

नीचे दी गई संख्याओं के गुणनखंडों को देखिए।

संख्या	गुणनखंड	गुणनखंड की संख्या
1	1	1
2	1, 2	2
3	1, 3	2
4	1, 2, 4	3
5	1, 5	2
6	1, 2, 3, 6	4
7	1, 7	2
8	1, 2, 4, 8	4
9	1, 3, 9	3
10	1, 2, 5, 10	4

तालिका में 1 ही केवल ऐसी संख्या है जिसके गुणनखंडों की संख्या 1 है इसलिए ये न तो भाज्य है न ही अभाज्य।

ऐसी संख्याएँ जिनके केवल दो ही गुणनखंड होते है (1 तथा स्वयं वह संख्या) उन्हें अभाज्य संख्या कहते हैं।

जैसे – 2, 3, 5, 7 आदि।

दो से अधिक गुणनखंडो वाली संख्याएँ भाज्य अथवा संयुक्त संख्याएँ कहलाती है। जैसे – 4, 6, 8, 9, 10 आदि।

संख्या खेल– आओ हम एक ऐसा खेल खेलते हैं जिसकी सहायता से हम बिना गुणनखण्ड किए भी बता सकते हैं कि संख्या भाज्य या अभाज्य है। सबसे पहले 1 से 100 तक की संख्याओं को नीचे दर्शाए अनुसार लिखिए –

चरण 1 संख्या 1 पर सबसे पहले बॉक्स ☐ बनाएँ क्योंकि यह ना तो भाज्य संख्या है और ना ही अभाज्य संख्या है।

चरण 2 संख्या 2 पर घेरा लगाइए और 2 के अतिरिक्त उसके सभी गुणजों जैसे 4, 6 वे 8 इत्यादि को काट दीजिए।

चरण 3 अगली बिना कटी संख्या 3 है। 3 पर घेरा लगाइए और 3 के शेष सभी गुणजों को काट दीजिए।

चरण 4 इस प्रक्रिया को तब तक जारी रखिए जब तक की दी गई सभी संख्याओं पर या तो घेरा ना लग जाए या वे कट ना जाएँ। घेरा लगी सभी संख्याएँ अभाज्य संख्याएँ हैं।

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

इस खेल के बाद बताइए कि 1 से 100 के बीच आपको कितनी अभाज्य संख्याएँ प्राप्त होती है ?

इन अभाज्य संख्याओं को क्रमबद्ध लिखिए और अपने दोस्तों से इनका मिलान भी कीजिए।

2.4 सम–विषम संख्याएँ

कनक और प्रीतम कंचे से खेल रहे थे।

कनक – देखो प्रीतम, मैं तुम्हें एक खेल सिखाती हूँ। कुछ कंचे मुट्ठी में लेकर आपस में मिलाकर एक मुट्ठी में जितने चाहो उतने ले कर अपनी मुट्ठी बंद कर लो। अब मुझे बताना है कि तुम्हारी मुट्ठी में कंचे जोड़ों में है या नहीं। इस खेल को एकी या बेकी भी कहते हैं।

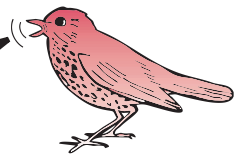
एकी मतलब जितने कंचे मुट्ठी में हैं उनके दो–दो समूह बनाना और यदि कोई कंचा अकेला बच जाए तो हुआ एकी और यदि सभी कंचों के दो–दो के जोड़े बन जाए तो वह हुआ बेकी। कनक व प्रीतम ने इस खेल को खेला और इसे तालिका में लिखा।

आप भी यह खेल अपने दोस्तों के साथ खेलिए और तय कीजिए कि किन–किन संख्याओं को एकी कहा जाए और किन संख्याओं को बेकी कहा जाए ?

क्या आप कोई नियम बना पाए ? इकाई के स्थान पर 2, 4, 6, 8, 0 होने पर संख्याएँ सम संख्याएँ कहलाती हैं। 1, 3, 5, 7, 9 इकाई स्थान पर हो तो वे संख्याएँ विषम संख्याएँ कहलाती हैं।

स्कोर कोर्ड		
कनक	प्रीतम	
15 कंचे	बेकी	गलत
19 कंचे	एकी	सही
24 कंचे	बेकी	सही
.....		

ऐसी सभी संख्याएँ जिनमें 2 का पूरा–पूरा भाग जाए या वे 2 का गुणज हो सम संख्याएँ कहलाती हैं।



2.5 विभाज्यता के नियम

वे नियम जो सरलता से बता देते हैं कि कोई संख्या किसी दूसरी संख्या से विभाजित हो सकती है या नहीं, विभाज्यता के नियम कहलाते हैं।

विभाजक	विभाजन की शर्त / शर्तें	उदाहरण
1	स्वतः	सभी पूर्णांक 1 में विभाज्य है
2	वे सभी संख्याएँ जिनके इकाई स्थान पर (सम संख्या) 2, 4, 6, 8 अथवा 0 में से कोई भी अंक हो तो वे संख्याएँ 2 से पूरी–पूरी विभाजित होती है।	1294 इकाई स्थान पर 4 है। संख्या 2 से भाज्य है।
3	दी हुई संख्या के सभी अंकों का योगफल 3 से विभाजित होता है तो वह संख्या भी 3 से भाज्य होगी।	1827 1+8+2+7 = 18 3 से विभाजित है।
4	जब किसी संख्या के दहाई एवं इकाई के अंकों से बनी संख्या 4 से विभाज्य होती है अथवा उस संख्या में दहाई व इकाई के स्थान पर 0 हो तो वह संख्या 4 से विभाजित होती है।	40832 में अन्तिम दो अंकों की संख्या 32, 4 से विभाजित। अतः 40832 भी 4 से विभाजित होगा।
5	वे सभी संख्याएँ जिनके इकाई के स्थान पर 0 अथवा 5 आता है वे संख्याएँ 5 से विभाजित होती है।	490, 875 आदि
6	यदि कोई संख्या 2 तथा 3 से अलग–अलग विभाजित होती है तो वह संख्या 6 से भी विभाज्य होगी।	216 2 से भी भाज्य व 3 से भी भाज्य है। अतः संख्या 216, 6 से भी विभाज्य है।

2.6 सार्व गुणज एवं अभाज्य गुणनखंड

सार्व गुणज –

उदाहरण 1 – 3 व 4 के गुणज लिखिए।

3 के गुणज = 3, 6, 9, (12), 15, 18, 21, (24) .....

4 के गुणज = 4, 8, (12), 16, 20, (24), 28 .....

अब 3 व 4 के समान गुणजों पर गोला बनाइए।

12, 24, 36 ..... ऐसी संख्याएँ है जो 3 व 4 दोनों के गुणज हैं इन्हें हम 3 व 4 का सार्व गुणज (समान गुणज) कहते हैं।

अभाज्य गुणनखंड

हम संख्या 18 के गुणनखंड पर विचार करते हैं –

$18 = 2 \times 9$ $\qquad$ $18 = 3 \times 6$

$= 2 \times 3 \times 3$ $\qquad$ $= 3 \times 2 \times 3$

अभाज्य संख्याएँ

किसी संख्या के इस प्रकार के गुणनखंड अभाज्य गुणनखंड कहलाते है।

किसी संख्या के अभाज्य गुणनखंड इस प्रकार भी ज्ञात किए जा सकते हैं।

2	24
2	12
2	6
3	3
	1

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

$32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

2.7 महत्तम समापवर्तक (म.स.)

(सर्व संभव गुणनखंड विधि) इसके लिए सभी संख्याओं के सर्व सम्भव गुणनखण्ड लिखेगें।

30 = 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

36 = 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

42 = 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42

1, 2, 3 व 6 संख्या 30, 36 व 42 के समान गुणनखंड है। इनमें 6 वह सबसे बड़ी (महत्तम) संख्या है जिससे संख्याएँ 30, 36 व 42 तीनों विभाज्य है। ऐसी संख्या को महत्तम समापवर्तक कहते हैं।

वह बड़ी से बड़ी संख्या जिससे दी गई संख्याओं में पूरा–पूरा भाग चला जाए, ऐसी संख्या को महत्तम समापवर्तक (म.स.) कहते हैं।

अभाज्य गुणनखंड विधि से म.स. ज्ञात करना

उदाहरण 2 – 24, 36 और 60 का म.स. ज्ञात कीजिए –

2	24
2	12
2	6
3	3
	1

2	36
2	18
3	9
3	3
	1

2	60
2	30
3	15
5	5
	1

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$

24, 36 व 60 के उभयनिष्ठ गुणनखंड $= 2 \times 2 \times 3$

अतः 24, 36 व 60 का म.स. $= 2 \times 2 \times 3 = 12$

2.8 लघुत्तम समापवर्त्य (ल.स.)

वह छोटी से छोटी संख्या जिसमें दी गई संख्याओं का पूरा–पूरा भाग चला जाए लघुत्तम समापवर्त्य (ल.स.) कहलाता है।

अभाज्य गुणनखंड विधि से ल.स. ज्ञात करना

48 और 30 का ल.स.

2	48
2	24
2	12
2	6
3	3
	1

2	30
3	15
5	5
	1

48 = 2 × 2 × 2 × 2 × 3
30 = 2 × 3 × 5

इन अभाज्य गुणनखंडों में अभाज्य गुणनखंड 2 अधिकतम 4 बार और 3 तथा 5 अधिकतम 1–1 बार ही आते है।

अतः अभिष्ठ ल.स. = 2 × 2 × 2 × 2 × 3 × 5
= 240

ल.स. = 240 होगा।

प्रश्नावली 2

1. निम्नलिखित संख्याओं के गुणनखंड लिखिए।
   (i) 48 (ii) 36 (iii) 100 (iv) 125
2. निम्नलिखित संख्याओं के प्रथम पाँच गुणज लिखिए।
   (i) 7 (ii) 12 (iii) 15 (iv) 20
3. निम्नलिखित संख्याओं के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात कीजिए।
   (i) 28 (ii) 54 (iii) 120 (iv) 148
4. निम्नलिखित के सार्व गुणनखंड ज्ञात कीजिए।
   (i) 24, 36 (ii) 35, 40 (iii) 12, 18, 30 (iv) 14, 25, 35
5. निम्नलिखित संख्याओं का म.स. ज्ञात कीजिए।
   (i) 25, 30 (ii) 14, 35, 21 (iii) 99, 165, 231
6. निम्नलिखित संख्याओं का ल.स. ज्ञात कीजिए।
   (i) 14, 28 (ii) 18, 24, 30 (iii) 48, 56, 72

अध्याय 3

पूर्ण संख्याएँ

3.1 दैनिक जीवन में हम गिनने के लिए प्राकृत संख्याओं N = 1,2,3..... का उपयोग करते है। यदि प्राकृत संख्याओं के समूह में 0 को और जोड़ दिया जाए तो यह नया संख्या समूह W = 0,1,2,3..... पूर्ण संख्याएँ कहलाती हैं।

3.1.1 पूर्ण संख्याओं को संख्या रेखा पर प्रदर्शित करना

इसके लिए अपनी उत्तर पुस्तिका में एक सरल रेखा खींचिए जिसमें समान दूरी पर चिह्न लगे हो –

इसमें प्रारम्भिक बिन्दु 0 से प्रारम्भ करते हुए बढ़ते क्रम से 1,2,3, ... आदि संख्या लिखें। हम यह देखते है कि हर संख्या अपनी बाईं संख्या से 1 अधिक (+1) है इस प्रकार दाईं ओर बढ़ने पर संख्या बढ़ती जाएगी।

कौनसी पूर्ण संख्या बड़ी होगी।

12 व 8	12 > 8
14 व 16	14 < 16
15 व 18	
37 व 39	

जो संख्या रेखा पर दाईं ओर है वह संख्या बड़ी है तथा जो बाईं ओर है वह संख्या छोटी है।

3.1.2 पूर्ववर्ती व उत्तरवर्ती संख्या किसी पूर्ण संख्या के पहले आने वाली संख्या पूर्ववर्ती और बाद में आने वाली संख्या उत्तरवर्ती संख्या कहलाती है।

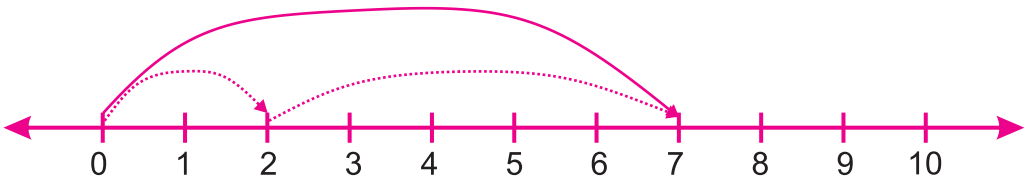
जैसे – 15 की पूर्ववर्ती संख्या = 15 - 1 = 14 तथा 15 की उत्तरवर्ती संख्या = 15 + 1 = 16 होगी।

अभ्यास कीजिए

पूर्ववर्ती संख्या	पूर्ण संख्या	उत्तरवर्ती संख्या
————	23	24
————	35	————
101	102	————
——	79	————

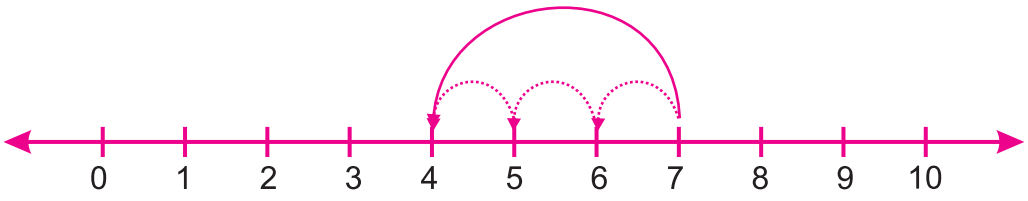
3.1.3 संख्या रेखा पर पूर्ण संख्याओं की जोड़ एवं घटाव

योग :— 2 तथा 5 को संख्या रेखा पर जोड़े



संख्या रेखा पर 2 से शुरू करके हम 2 से 5 इकाई दाईं ओर बढ़ते हैं तब $2 + 5 = 7$ पर पहुँचते हैं।

घटाव :— 7 में से 3 घटाएँ



संख्या रेखा पर 7 से शुरू करके हम 3 कदम बाईं ओर (7-3) = 4 तक पहुँच जाते हैं, अतः $7 - 3 = 4$ होगा।

आप भी इसी प्रकार अलग–अलग संख्याएँ लेकर जोड़ एवं घटाव का अभ्यास करें।

प्रश्नावली 3.1

1. निम्नलिखित संख्याओं की पूर्ववर्ती संख्याएँ लिखिए।
   (i) 25 (ii) 2400 (iii) 1025 (iv) 200

2. निम्नलिखित संख्याओं की उत्तरवर्ती संख्याएँ लिखिए।
   (i) 2304 (ii) 3000 (iii) 299 (iv) 1099

3. सबसे छोटी पूर्ण संख्या कौनसी है ?

4. (✓ व ✗) का चिन्ह लगाए।

   (i) - 3 एक पूर्ण संख्या है।

   (ii) 4 + 3 = 2 + 5

   (iii) 240 + 0 = 240

   (iv) किसी पूर्ण संख्या को 1 से गुणा करने पर वही संख्या प्राप्त होगी।

   (v) पूर्ण संख्याओं का योग भी पूर्ण संख्या ही होती है।

3.2 पूर्ण संख्याओं के गुणधर्म

3.2.1 संवृत गुण

नीचे दी गई संख्याओं को ध्यान से देखिए एवं विचार कीजिए

6 + 2 = 8 (पूर्ण संख्या)

2 + 0 = 2 (पूर्ण संख्या)

0 + 7 = 7 (पूर्ण संख्या)

उक्त उदाहरणों को एवं ऐसे उदाहरण और देखकर हम यह कह सकते हैं कि दो पूर्ण संख्याओं का योग भी एक पूर्ण संख्या ही प्राप्त होती है।

इसलिए पूर्ण संख्या योग के अन्तर्गत संवृत है।

क्या पूर्ण संख्याएँ घटाव के लिए भी संवृत है ?

8 - 5 = 3 (पूर्ण संख्या)

5 - 7 = -2 (पूर्ण संख्या नहीं)

हमने देखा कि पूर्ण संख्याओं का घटाव पूर्ण संख्या हो भी सकती है और नहीं भी हो सकती है। अतः पूर्ण संख्याएँ घटाव के अन्तर्गत संवृत नहीं है।

पुनः हम गुणन हेतु देखते हैं –

$6 \times 2 = 12$

$4 \times 5 = 20$

$10 \times 0 = 0$

हम देखते है कि हम ऐसी कोई पूर्ण संख्याएँ नहीं ढूंढ सकते हैं जिनका गुणनफल एक पूर्ण संख्या नहीं हो।

अतः पूर्ण संख्याएँ गुणन के अन्तर्गत संवृत होती है।

भाग (विभाजन) संक्रिया पर विचार करें।

$12 \div 3 = 4$ पूर्ण संख्या

$7 \div 8 = \frac{7}{8}$ पूर्ण संख्या नहीं

$0 \div 5 = 0$ पूर्ण संख्या

$3 \div 2 = \frac{3}{2}$ पूर्ण संख्या नहीं

दो पूर्ण संख्याओं का भागफल एक पूर्ण संख्या हो भी सकती है और नहीं भी अतः पूर्ण संख्याएँ भागफल के अन्तर्गत संवृत नहीं है।

3.2.2 क्रम विनिमेयता

आइए अब निम्नलिखित पर विचार करें –

$8 + 7 = 15$	$4 + 7 = 11$
$7 + 8 = 15$	$7 + 4 = 11$

अतः दोनों संख्याओं का क्रम बदलकर जोड़ने पर वही योगफल प्राप्त होता है। आप भी ऐसे ही संख्या युग्म लेकर इस तथ्य की जाँच कीजिए।

क्या कोई ऐसा युग्म मिलता है जिससे क्रम बदलने पर योग परिवर्तित होता है ? नहीं होता है। अतः पूर्ण संख्याएँ योग के अन्तर्गत क्रमविनिमेय है।

पुनः $8 \times 5 = 40$

$5 \times 8 = 40$

$7 \times 10 = 70$

$10 \times 7 = 10$

योग के समान ही गुणन के लिए भी पूर्ण संख्याए क्रमविनिमेयता का पालन करती है। उदाहरण लेकर जाँच भी कीजिए।

घटाव (व्यवकलन)

$8 - 3 = 5$ परन्तु $3 - 8 = -5$

अतः क्रम बदलकर घटाने पर समान उत्तर प्राप्त नहीं होता है।

इसी प्रकार भाग के लिए

$8 \div 2 = 4$ परन्तु $2 \div 8 = \frac{1}{4}$

$25 \div 5 = 5$ और $5 \div 25 = \frac{1}{5}$

भाग के लिए भी क्रम बदलने पर उत्तर समान नहीं आता है अतः पूर्ण संख्याओं के लिए व्यवकलन व भाग दोनों में ही क्रमविनिमेयता नहीं है।

3.2.3 साहचर्यता

$$(5 + 2) + 4 = 5 + (2 + 4)$$

$$(7 + 9) + 1 = 7 + (9 + 1)$$

योग की उपर्युक्त संक्रियाओं को ध्यान से देखे पूर्ण संख्याओं में पाए जाने वाले इस गुण को साहचर्यता कहते हैं।

यही संक्रिया गुणन के लिए भी देखते हैं –

$$(2 \times 4) \times 3 = 2 \times (4 \times 3)$$

$$(4 \times 5) \times 6 = 4 \times (5 \times 6)$$

हम और संख्याएँ लेकर भी जाँच करने पर पाएगे कि पूर्ण संख्याएँ गुणन के लिए भी साहचर्यता का पालन करती है।

परन्तु उक्त संक्रिया व्यवकलन (घटाव) एवं भाग में लगाने पर परिणाम अलग–अलग प्राप्त होते हैं अतः पूर्ण संख्याओं में व्यवकलन एवं विभाजन की संक्रियाओं में साहचर्यता का गुण नहीं पाया जाता है।

प्रश्नावली 3.2

1. उपयुक्त क्रम में लगाकर योग ज्ञात कीजिए।

(i) 85 + 186 + 15 (ii) 175 + 96 + 25

(iii) 65 + 75 + 35 (iv) 55 + 86 + 45

2. उपयुक्त क्रम में (नियम) लगाकर गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(i) 4 x 1225 x 25 (ii) 8 x 20 x 125

3. उपयुक्त गुणों का प्रयोग कर गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(i) 185 x 106 (ii) 208 x 185

(iii) 54 x 102 (iv) 158 x 1008

4. मिलान कीजिए।

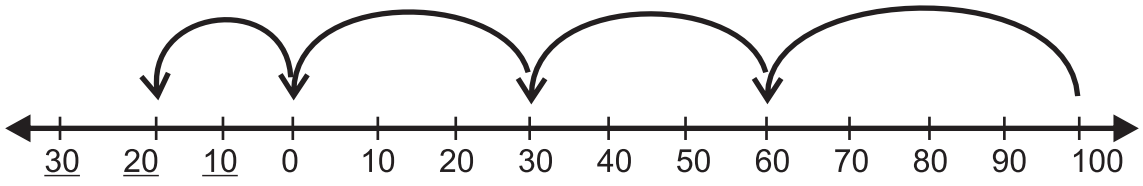
(i) 2 + 8 = 8 + 2	(a) गुणन की क्रम विनिमेयता
(ii) 8 x 90 = 90 x 8	(b) जोड़ की क्रम विनिमेयता
(iii) 25 + (10 + 45) = (25 + 10) + 45	(c) गुणा का साहचर्य नियम
(iv) 5 x (4 x 28) = (5 x 4) x 28	(d) योग का साहचर्य नियम

अध्याय 4

ऋणात्मक संख्याएँ एवं पूर्णांक

4.1 कुणाल को हर माह उसके पिताजी से 100 रूपये जेब खर्च के लिए देते हैं वह उसे अपनी बड़ी बहन को देता है उसे जरूरत के अनुसार थोड़े–थोड़े पैसों का लेन–देन कर लेता है जिसे उसकी बहन पेपर पर अंकित कर लेती है।

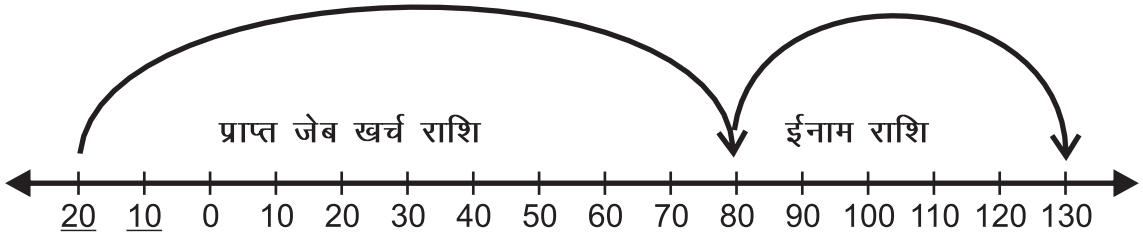
कुणाल ने पहले सप्ताह में 40 रूपये लिए, दूसरे सप्ताह में 30 रूपये लिए, तीसरे सप्ताह में 30 रूपये लिए चौथे सप्ताह में वह 20 रूपये और माँगता है। इस पर बहन कहती है कि मैने पूरी राशि लौटा दी है तब कुणाल कहता है, आप इसे अगले महीने में से काट लेना तब बहन उसे 20 रूपये दे देती है वह इसे संख्या रेखा पर निम्नानुसार अंकित करती है–



खर्च राशि का विवरण

अगले माह के प्रथम दिन कुणाल को जेब खर्च के 100 रूपये मिले जिसे वह अपनी बहन को दे देता है। क्या आप बता सकते हैं कि कुणाल के बहन के पास कितने रूपये जमा है ?

स्वच्छ भारत मिशन प्रतियोगिता में कुणाल को 50 रूपये का नकद ईनाम मिला। अब कुणाल के कुल कितने रूपये अपनी बहन के पास जमा हो गए ?



संख्या रेखा को देख कर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(i) कुणाल ने प्रथम माह में कितने रूपये खर्च किए ?

(ii) चौथे सप्ताह में बहन ने उसे कितने रूपये दिए ?

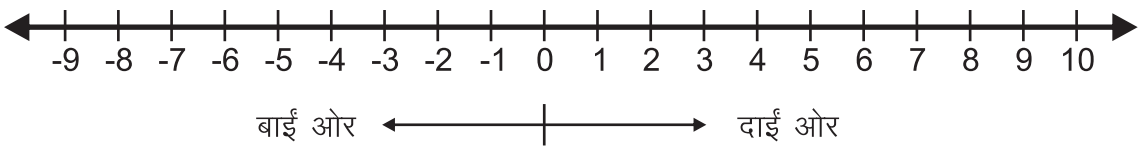
(iii) चौथे सप्ताह में दी राशि को बहन ने संख्या रेखा पर किस ओर दर्शाया है ?

(iv) शून्य के दाईं ओर लिखे 20 रूपये व बाईं ओर लिखे 20 रूपये में क्या अन्तर है ?

(v) दूसरे माह में प्राप्त 100 रूपये व 50 रूपये को संख्या रेखा पर किस ओर अंकित किया गया है ?

संख्या रेखा पर संख्याएँ दाईं ओर बढ़ती हैं। प्रत्येक संख्या अपनी बाईं ओर की संख्या से बड़ी तथा दाई ओर की संख्या से छोटी होती है।

शून्य के बाईं ओर की संख्याओं को ऋणात्मक संख्याएँ कहते हैं तथा इन्हें दाईं ओर की संख्याओं से अलग दर्शाने के लिए –1, –2, –3,..... से प्रदर्शित करते हैं।



प्रत्येक संख्या के बाद वाली संख्या उसकी उत्तरवर्ती संख्या कहलाती है तथा उसके पहले आने वाली संख्या पूर्ववर्ती संख्या कहलाती है

जैसे संख्या 4 की उत्तरवर्ती संख्या 5

संख्या – 3 की उत्तरवर्ती संख्या = – 2

संख्या 2 की पूर्ववर्ती संख्या 1

संख्या – 5 की पूर्ववर्ती संख्या = – 6

दी गई तालिका में संख्याओं की उत्तरवर्ती व पूर्ववर्ती संख्याएँ लिखिए।

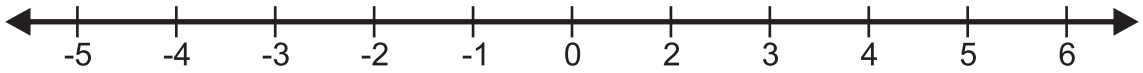
संख्या	उत्तरवर्ती	पूर्ववर्ती
3		
0		
–2		
16		
–10		

4.2 पूर्णांक

पूर्व में अध्ययन की गई प्राकृत संख्याएँ 1, 2, 3, ... इसके पश्चात् संख्याओं के समूह में 0 को सम्मिलित करने पर वे पूर्ण संख्याएँ कहलाती है, 0, 1, 2, 3, ... अभी हमने ज्ञात किया कि संख्याएँ ऋणात्मक भी होती है जैसे – 1, –2, –3, ...

यदि पूर्ण संख्याओं के समूह में ऋणात्मक संख्याओं को शामिल कर लें तो बनने वाली नई संख्याओं का समूह पूर्णांक कहलाता है।

संख्या रेखा पर पूर्णांकों का निरूपण –



4.2.1 पूर्णांक में जोड़

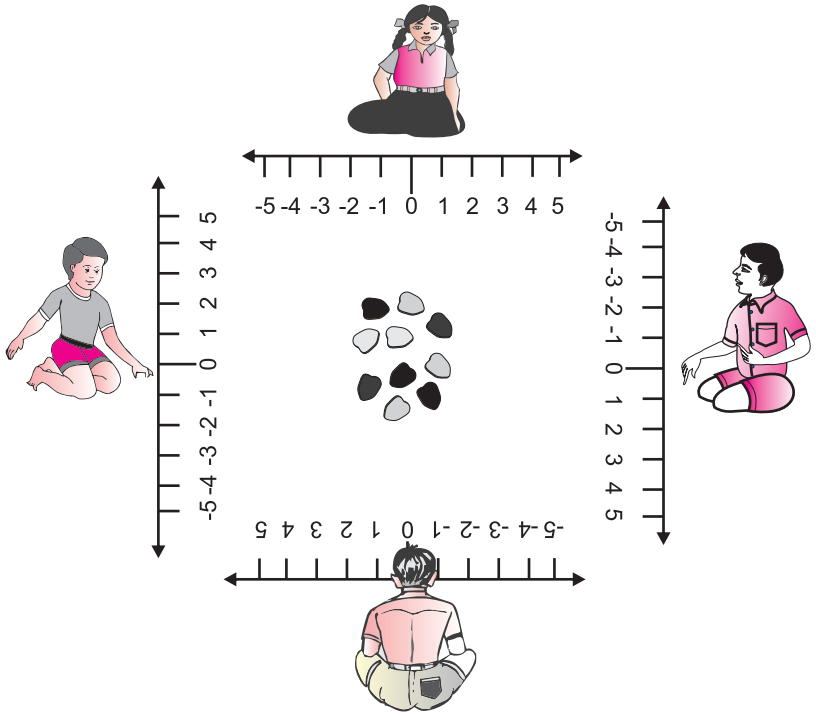
इमली के बीज का खेल

सामग्री – इमली के बीज (10) बीच में से फोड़े हुए, प्रत्येक खिलाड़ी के लिए एक संख्या रेखा, प्रत्येक खिलाड़ी के लिए एक गोटी, कटोरी।

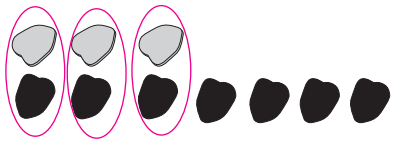
खेल के नियम – (i) प्रत्येक बीज का सफेद भाग (+ 1) तथा काला भाग (- 1) को प्रदर्शित करेगा।

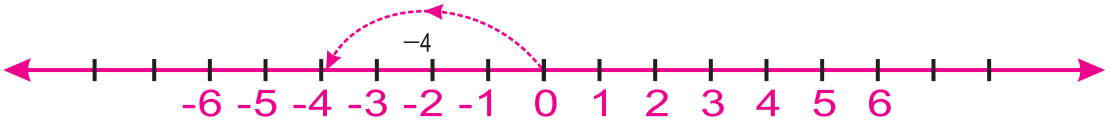
(ii) बारी–बारी से सभी खिलाड़ी बीज उछालेंगे। उछल कर जमीन पर गिरे बीजों से 1 सफेद 1 काला आपस में निरस्त हो कर कटोरी में जाएँगे। शेष बीजों की स्थिति के अनुसार खिलाड़ी अपनी संख्या रेखा पर गोटी रखेगा। इसी प्रकार खेल जारी रहेगा।

(iii) जो खिलाड़ी सबसे पहले 10 पर पहुँचेगा विजयी होगा।



कोयल ने बीज उछाले जिसमें तीन सफेद तथा सात काले बीज प्राप्त हुए।





अतः तीन निरस्त होने के बाद चार काले बीज प्राप्त होते है, वह अपनी गोटी (-4) पर रखती है।

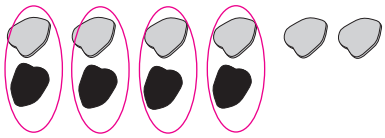
तीन सफेद (+3) + सात काले (-7)

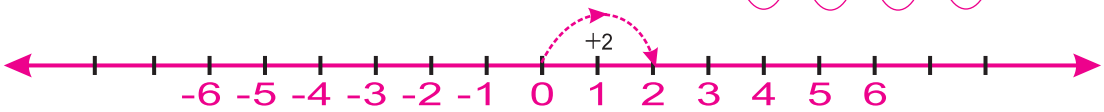
= (+3) + (-7)

= (-4)

अब कबीर ने बीज उछाले, उसे चार काले और छः सफेद प्राप्त हुए।

अतः वह अपनी गोटी +2 पर रखेगा।





चार काले (-4) + छः सफेद (+6)

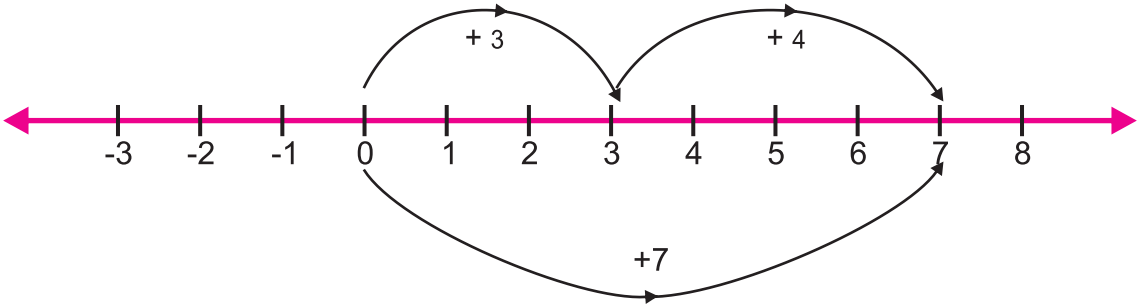
= (-4) + (+6)

= + 2

पुनः कोयल को अगली बारी में दो काले बीज प्राप्त होते हैं अब उसकी गोटी किस दिशा में आगे बढ़ेगी? प्रयास करो।

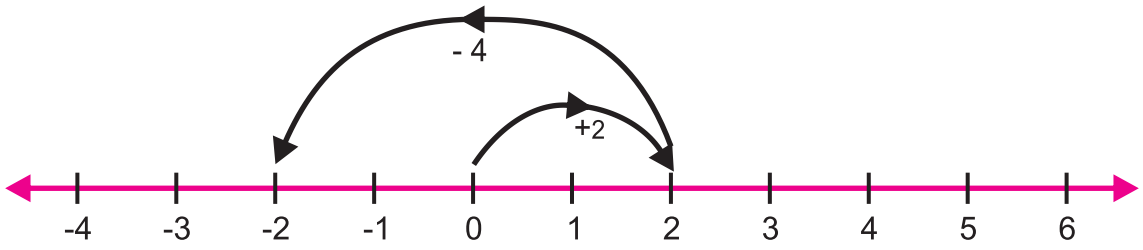
सदैव इस तरह बीजों के सफेद व काले भागों से पूर्णांकों का जोड़ना व घटाना सम्भव नहीं होता है। आइए इसे संख्या रेखा की सहायता से जोड़ व घटाना सीखे।

(i) (+3) + (+4) संख्या रेखा पर हम शून्य से प्रारम्भ करते हैं



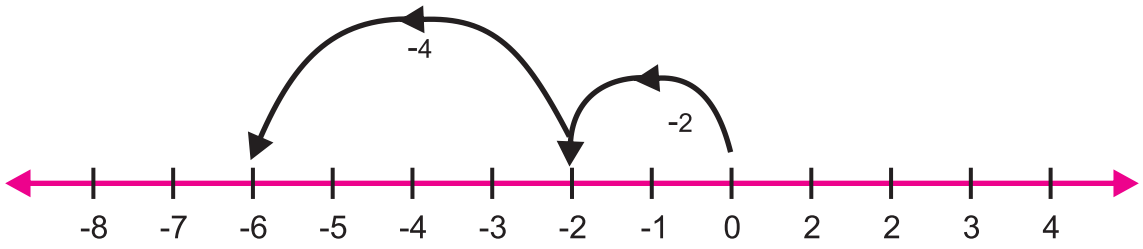
+3 अर्थात 3 कदम दाईं ओर चलते हैं, +4 का अर्थ है 4 कदम दाईं ओर। दोनों के योग का अर्थ है कुल 7 कदम दाईं ओर बढ़ते हैं। अतः +7 प्राप्त होता है।

(i) (+2) + (-4) संख्या रेखा पर शून्य से शुरू करते हैं।



+ 2 अर्थात 2 कदम दाईं ओर चलते हैं। तत्पश्चात - 4 का अर्थ 4 कदम बाईं ओर चलते हैं इस प्रकार हम 1, 0, –1, होते हुए – 2 पर पहुँचते हैं अतः – 2 प्राप्त होता है।

(i) (-2) + (-4)



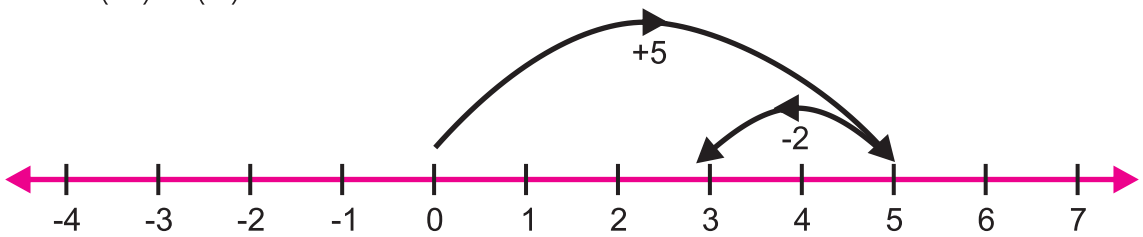
इसी प्रकार शून्य से प्रारम्भ होते हुए –2 के लिए 2 कदम बाईं ओर तथा–4 के लिए और 4 कदम बाईं ओर चलेंगे। इस प्रकार हम –3, –4, –5, होते हुए –6 पर पहुँच जाएँगे।

अतः (-2) + (-4) = - 6

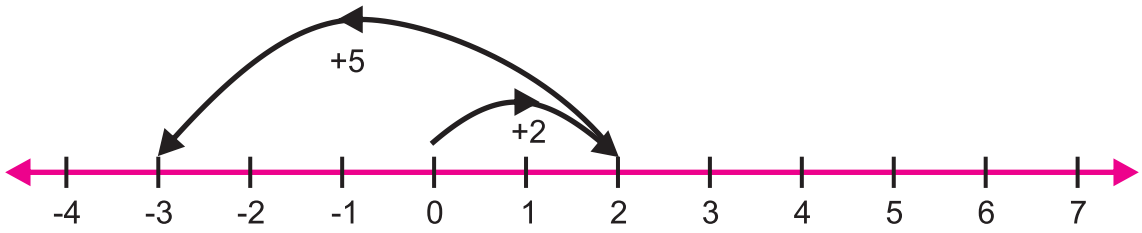
4.2.2 पूर्णांकों का घटाव

(+5) - (+2) चूंकि घटाव व योग की विपरीत संक्रिया है अतः +2 घटाने के लिए हमें 5 में से 2 कदम बाईं ओर चलना पड़ेगा। (जब कि योग में दाईं ओर चलते हैं)

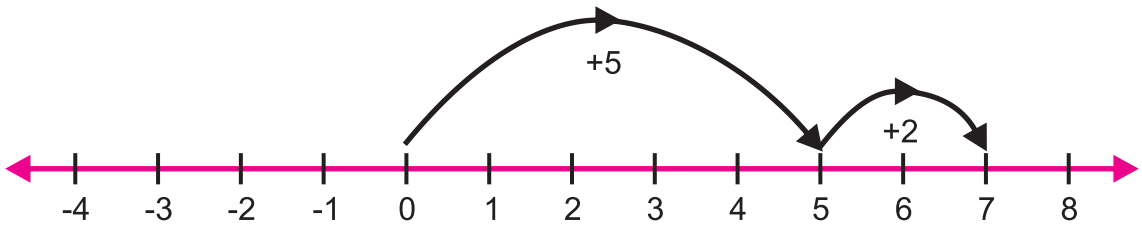
(+5) + (-2)



इसी प्रकार (+2) - (+5) में क्या करेंगे 2 कदम दाईं ओर चलेंगे। ऋणात्मक संक्रिया के लिए +5 जोड़ने के लिए हम बाईं ओर चलते हैं। अतः 5 कदम बाईं ओर चलेंगे।



इसी प्रकार (+5) - (-2)



4.2.3 योज्य तत्समक

आप जानते हैं कि +3+0=3, -5+0 = - 5 अर्थात् योग संक्रिया में 0 ऐसी संख्या है जो उसी के समान परिणाम देती है यहाँ पर शून्य योग्य तत्समक कहलाता है।

4.2.4 योज्य प्रतिलोम

किसी संख्या का योज्य प्रतिलोम वह संख्या है जिसे जोड़ने पर हमें शून्य (योज्य तत्समक) प्राप्त होता है।

जैसे 3 में क्या जोड़े कि शून्य प्राप्त हो। स्पष्टतः -3

(3) + (-3) = 0 इसी प्रकार -3 का योज्य प्रतिलोम +3

प्रश्नावली 4.1

1. निम्नलिखित संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए।

   (i) + 3 (ii) - 4 (iii) 0 (iv) - 5

2. संख्या रेखा का प्रयोग करते हुए मान ज्ञात कीजिए।

   (i) 6 + (-3) (ii) (-4) + (-3) (iii) -2 + (+5) (iv) (-7) - (-5)
   (v) 6 - (-3)

3. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

   (i) - 5 + ------- = 0 (ii) 7 + (-7) = --------

   (iii) (-3) + ------- = -7 (iv) (-3) + ------ = -5

4.3 पूर्णांक के जोड़ एवं घटाव के गुणधर्म

4.3.1 संवृत गुणधर्म पूर्णांक को योग व घटाव करने पर हमें पूर्णांक ही प्राप्त होता है। आप कोई भी दो–दो पूर्णांक लेकर उन्हें जोड़कर एवं घटाकर देखें। क्या ऐसा कोई पूर्णांक युग्म है, जिन्हें जोड़ने अथवा घटाने पर पूर्णांक प्राप्त नहीं होगा? नहीं, अतः हम कह सकते है कि पूर्णांक योग एवं घटाव के लिए संवृत है।

किसी पूर्णांक a व b के लिए (a+b) तथा (a-b) सदैव पूर्णांक ही होगा।

4.3.2 क्रम विनिमेय गुणधर्म पूर्ण संख्याओं के समान ही पूर्णांक भी क्रम विनिमेयता का पालन करते हैं।

अर्थात् व्यापक रूप से पूर्णांकों a तथा b के लिए हम कह सकते हैं।

$$a + b = b + a$$

हम जानते है कि पूर्ण संख्याओं के लिए घटाव की संक्रिया में क्रम विनिमेय गुणधर्म लागू नहीं होता है। पूर्णांकों के लिए जाँच करते हैं।

कोई दो पूर्णांक 4 व 3 लेने पर

$$4 - 3 = 1 \text{ तथा } 3 - 4 = -1$$

$$-1 \neq 1$$

अतः घटाव पूर्णांकों के लिए क्रम विनिमेय नहीं है।

4.3.3 साहचर्य गुणधर्म पूर्णांकों –4, 2 व 3 के लिए साहचर्य गुणधर्म की जाँच करने पर

$-4 + [2 + 3]$ व $[-4 + 2] + 3$ की गणना करें।

दोनों परिस्थिति में उत्तर +1 ही प्राप्त होता है। आप ऐसे ही और उदाहरण लेकर इसकी जाँच करने पर पाएँगें कि पूर्णांकों का योग साहचर्य नियम का पालन करता है अर्थात्

किन्हीं पूर्णांकों a, b व c के लिए $a + (b + c) = (a + b) + c$

4.3.4 योज्य तत्समक रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(i) 4 + 0 = ... (ii) - 3 + ... = - 3

(iii) 0 + 5 = ...

उक्त उदाहरणों से यह स्पष्ट है कि पूर्णांक में 0 जोड़ने पर हमें परिणाम में वही पूर्णांक प्राप्त होते है। अतः '0' पूर्णांकों के लिए योज्य तत्समक है।

प्रश्नावली 4.2

1. हल कीजिए।

   (i) - 27 + (-3) + 30 (ii) 23 - 41 - 11 (iii) 15 - 8 - (- 9)

2. ऐसे दो पूर्णांक लिखिए जिनका।

   (i) योग (–7) हो (ii) अन्तर 4 हो (iii) योग 0 हो।

3. निम्न कथनों में दिए गए बॉक्स में <, >, = में से उपयुक्त चिह्न लगाइए।

   (i) - 14 + 11 + 5 [ ] 14 - 11 - 5

   (ii) 30 + (- 5) + (- 8) [ ] (- 5) + (- 8) + 30

   (iii) (-14) + 11 + (-12) [ ] 14 + 11 + 12

4. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

   (i) (- 3) + 5 = 5 + ...

   (ii) 17 + ... = 17

   (iii) ..... + (- 5) = 0

   (iv) - 11 + [(-12) + 4] = [(-11) + (-12)] + ...

5. नीचे दिए गए पूर्णांकों के उदाहरणों को सही गुणधर्म से मिलान कीजिए।

	उदाहरण	**गुणधर्म**
(i)	(a + b) + c = a + (b + c)	तत्समक
(ii)	3 + 4 = 4 + 3	साहचर्य
(iii)	(- 4) + 0 = (- 4)	क्रमविनिमेय

4.4 पूर्णांकों का गुणन

4.4.1 धनात्मक पूर्णांक का ऋणात्मक पूर्णांक से गुणा

$$3 \times (-4) = (-4) + (-4) + (-4) = -12$$

इसी प्रकार $5 \times (-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -15$

आप भी ऐसे ही और उदाहरण 4 × (-2), 8 × (- 4) आदि करके देखे। उक्त विधि द्वारा हमने यह देखा कि जब धनात्मक पूर्णांक का गुणन ऋणात्मक पूर्णांक से किया जाता है तो हमें ऋणात्मक पूर्णांक ही प्राप्त होता है।

4.4.2 ऋणात्मक पूर्णांक का ऋणात्मक पूर्णांक से गुणन

निम्नलिखित को देखिए –

$-3 \times 4 = -12$

$-3 \times 3 = -9 = (-12) - (-3)$

$-3 \times 2 = -6 = (-9) - (-3)$

$-3 \times 1 = -3 = (-6) - (-3)$

$-3 \times 0 = 0 = -3 - (-3)$

$-3 \times -1 = 0 = 0 - (-3) = 3$

$-3 \times -2 = 6 = 3 - (-3) = 6$

$-3 \times -3 =$ .....

$-3 \times -4 =$ .....

इसी प्रकार

$-4 \times 2 = -8$

$-4 \times 1 = -4 = -8 - (-4)$

$-4 \times 0 = 0 = -4 - (-4)$

$-4 \times -1 = 4 =$ .....

$-4 \times -2 =$ ..... = ...

उक्त पैटर्न को देखकर हम यह कह सकते हैं कि दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक होता है। हम दो ऋणात्मक पूर्णांकों को पूर्ण संख्या की तरह गुणा करते हैं तथा गुणनफल के पूर्व में (+) चिन्ह लगाते हैं। उदाहरण – $(-3) \times (-2) = 6$, $(-5) \times (-6) = 30$

4.4.3 तीन या तीन से अधिक ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल :

हमने देखा कि दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल धनात्मक होता है तथा पुनः धनात्मक पूर्णांक व ऋणात्मक पूर्णांक का गुणन ऋणात्मक होता है।

जैसे – $(-2) \times (-3) \times (-4) = 6 \times (-4) = -24$

$(-2) \times (-4) \times (-5) = 8 \times (-5) = -40$

$(-2) \times (-3) \times (-4) \times (-5) = 6 \times 20 = 120$

$(-2) \times (-3) \times (-4) \times (-5) \times (-6) = 6 \times 20 \times (-6) = 120 \times (-6) = -720$

उक्त पैटर्न से हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि यदि ऋणात्मक पूर्णांक की संख्या सम (2, 4, 6, ...) हो तब उनका गुणनफल धनात्मक तथा यदि पूर्णांकों की संख्या विषम (1, 3, 5, ...) तो गुणनफल ऋणात्मक प्राप्त होगा।

4.4.4 शून्य से गुणन :

नीचे दिये गए पैटर्न को देखकर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

$-4 \times 3 = -12$	$-5 \times 3 = -15$
$-4 \times 2 = -8 = -12 - (-4)$	$-5 \times 2 = -10 = -15 - (-5)$
$-4 \times 1 = -4 = -8 - (-4)$	$-5 \times 1 =$ ..... = ...
$-4 \times 0 = 0 = (-4) - (-4)$	$-5 \times 0 =$ ..... = ...

उक्त पैटर्न के आधार पर हम यह कह सकते हैं कि किसी पूर्णांक को शून्य से गुणा करने पर शून्य प्राप्त होता है।

व्यापक रूप से किसी पूर्णांक a के लिए

$$a \times 0 = 0 = 0 \times a$$

4.5 पूर्णांक का विभाजन

विभाजन गुणन की विपरीत प्रक्रिया है परन्तु चिह्न का निर्धारण गुणन क्रिया के समान ही होता है।

यदि दोनों पूर्णांक समान होंगे तो भागफल धनात्मक होगा एवं यदि पूर्णांकों के चिन्ह विपरीत हो तो भागफल ऋणात्मक होगा।

4.6 पूर्णांकों के गुणनफल के गुणधर्म

4.6.1 संवृत पूर्णांक योग के समान ही गुणन के लिए भी संवृत होते हैं अर्थात् किन्हीं भी दो पूर्णांकों का गुणनफल सदैव पूर्णांक ही होगा। व्यापक रूप से किन्ही पूर्णांकों a, b के लिए

$a \times b = c$, c भी एक पूर्णांक ही होगा।

4.6.2 क्रमविनिमेयता हम जानते हैं कि पूर्णांकों का योग क्रमविनिमेय होता है, पुनः गुणन के लिए क्रमविनिमेयता की जाँच करने के लिए निम्न रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

स्तम्भ 1	स्तम्भ 2
$5 \times (-4) =$	$-4 \times 5 =$ .....
$-3 \times 4 =$	$4 \times -3 =$ .....
$-3 \times -5 =$	$-5 \times 3 =$ .....
$7 \times 6 =$	$6 \times 7 =$ .....

क्या स्तम्भ 1 व स्तम्भ 2 में गुणनफल समान प्राप्त होता है ? हाँ

अतः हम कह सकते है कि पूर्णांकों का गुणनफल क्रम पर निर्भर नहीं करता है। अतः पूर्णांक गुणन के लिए क्रम विनिमेयता का पालन करते हैं।

व्यापक रूप से पूर्णांक a व b के लिए सदैव

$a \times b = b \times a$ होगा।

4.6.3 गुणात्मक तत्समक हम जानते हैं कि पूर्ण संख्याओं के लिए गुणात्मक तत्समक 1 है पूर्णांकों के लिए जाँच करें।

$(-3) \times 1 = -3$	$1 \times 5 = 5$
$(-4) \times 1 = -4$	$1 \times 6 =$ .....
$1 \times (-6) =$	$1 \times 8 =$ .....
$1 \times (-7) =$	$10 \times 1 =$ .....

यह दर्शाता है कि 1 पूर्णांकों के लिए गुणात्मक तत्समक है। व्यापक रूप में पूर्णांक a के लिए

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

4.6.4 गुणन का साहचर्य गुणधर्म

आप पूर्णांक 3, –4, –2 को लीजिए।

$[3 \times (-4)] \times (-2)$	$3 \times [(-4) \times (-2)]$
$= (-12) \times (-2)$	$= 3 \times (8)$
$= 24$	$= 24$

अतः $[3 \times (-4)] \times (-2) = 3 \times [(-4) \times (-2)]$

आप ऐसे ही तीन अन्य पूर्णांकों का समूह लेकर उपयुक्त गतिविधि के आधार पर पूर्णांकों के लिए गुणन साहचर्य गुणधर्म की जाँच करें। व्यापक रूप से किन्हीं तीन पूर्णांकों a, b, c के लिए

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

4.6.5 वितरण गुण

हम जानते है कि पूर्ण संख्याओं के लिए वितरण का गुणधर्म

$$a(b + c) = a \times b + a \times c$$

क्या यह पूर्णांकों के लिए भी सत्य है आइए नीचे कुछ उदाहरण लेकर इसकी जाँच करें।

(i)	$(-7) \times [2 + (-5)]$ $= (-7) \times (-3) = 21$	$(-7) \times 2 + (-7) \times (-5)$ $-14 + 35 = 21$
(ii)	$(-4) \times [(-3) + (-7)]$ $= (-4) \times (-10) = 40$	$(-4) \times (-3) + (-4) \times (-7)$ $12 + 28 = 40$
(iii)	$(-8) \times [(-2) + (-1)]$ $= (-8) \times (-3) = 24$	$(-8) \times (-2) + (-8) \times (-1)$ $16 + 8 = 24$

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि पूर्णांकों के लिए भी योग पर गुणन का वितरण नियम सत्य है। व्यापक रूप में किन्हीं तीन पूर्णांकों a, b, c के लिए

$$\boxed{a \times (b + c) = a \times b + a \times c}$$

4.7 पूर्णांक के भाग के गुण

नीचे दिए गए कथनों एवं निष्कर्षों को देखिए।

	कथन	निष्कर्ष
(i)	$(-8) \div (-2) = 4$	परिणाम पूर्णांक है।
(ii)	$(-2) \div (-8) = \frac{-2}{8}$	परिणाम एक पूर्णांक नहीं है।
(iii)	$(-8) \div (-4) = -2$	परिणाम पूर्णांक है।
(iv)	$3 \div (-8) = \frac{3}{-8}$	परिणाम एक पूर्णांक नहीं है।

हम देखते हैं कि पूर्णांक भाग के अन्तर्गत संवृत नहीं हैं अर्थात् दो पूर्णांकों का भागफल भी एक पूर्णांक हो ऐसा आवश्यक नहीं है।

4.7.1 क्रम विनिमेयता हम जानते हैं कि पूर्ण संख्याओं के लिए भाग क्रम विनिमेय नहीं है। नीचे दिए गए उदाहरणों से हम यह कह सकते हैं कि पूर्णांकों के लिए भी भाग क्रम विनिमेय नहीं है।

$$(-8) \div (-2) \neq (-2) \div (-8)$$

$$(-6) \div 2 \neq 2 \div (-6)$$

प्रश्नावली 4.3

1. नीचे दिए गए पूर्णांकों के उदाहरणों को गुणन के सही गुणधर्म से मिलान कीजिए।

	उदाहरण	गुणधर्म
(i)	$(-4) \times 5 = 5 \times (-4)$	साहचर्य
(ii)	$(-4) \times [(-3) + (-2)] = (-4) \times (-3) + (-4) \times (-2)$	क्रम विनिमेय
(iii)	$(-4) \times [(-7) \times 5] = [(-4) \times (-7) \times 5$	वितरण गुण

2. पूर्णांकों के गुणन के गुणधर्म को ध्यान में रखकर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(i)	$26 \times (-48) = (-48) \times$	क्रम विनिमेय
(ii)	$(-6) \times [(-2) + (-1)] = (-6) \times (-2) + (-6) \times$	वितरण गुण
(iii)	$100 \times [(-4) \times (-52)] = [100 \times$ ..... $] \times (-52)$	साहचर्य

3. उचित गुणधर्मों का प्रयोग कर गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(i) $26 \times (-48) + (-48) \times (-56)$

(ii) $8 \times (78) \times (-125)$

(iii) $9 \times (50 - 2)$

(iv) 999×45

अध्याय 5

भिन्न एवं दशमलव संख्याएँ

5.1 आपने भाग अ में भिन्न व तुल्य भिन्न, भिन्नों में अंश व हर का अध्ययन लेखा चित्रों के माध्यम से किया। आओ अब उचित, अनुचित मिश्र भिन्न की जानकारी प्राप्त करते हैं –

ऐसी भिन्न जिसमें अंश, हर से बड़ा या बराबर होता है अनुचित भिन्न कहलाती है।

जैसे $\frac{5}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{7}$ आदि।

ऐसी भिन्न जिसमें अंश, हर से छोटा होता है, उचित भिन्न कहलाती है।

जैसे $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{1}{2}$ आदि।

अनुचित भिन्न को पूर्ण इकाई व उचित भिन्न (इकाई के हिस्से) के योग के रूप में दर्शाया जाता है, यह मिश्रित भिन्न कहलाती है।

जैसे $1 + \frac{1}{4}$ या $1\frac{1}{4}$, $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}$

5.1.1 भिन्नों की जोड़

जिस प्रकार हम संख्याओं को जोड़ते हैं उसी प्रकार ऐसी सभी संख्याएँ जिनकी सबसे छोटी इकाई समान हो उसे हम आपस में जोड़ सकते हैं।

उदाहरण 1 $\frac{1}{5}$ व $\frac{3}{5}$ का योग ज्ञात कीजिए।

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{1+3}{5} = \frac{4}{5}$$

उदाहरण 2 $\frac{2}{5}$ व $\frac{3}{4}$ का योग ज्ञात कीजिए।

$\frac{2}{5} + \frac{3}{4}$ हर 5 व 4 का लघुतम समापवर्त्य लेते है जो कि 20 है।

$$= \frac{(2 \times 4) + (3 \times 5)}{20} = \frac{8 + 15}{20} = \frac{23}{20}$$

उदाहरण 3 $4\frac{1}{3} + 3\frac{1}{3}$

$$= \frac{13}{3} + \frac{10}{3}$$

$$= \frac{13+10}{3}$$

$$= \frac{23}{3} = 7\frac{2}{3}$$

5.1.2 भिन्नों का घटाव

योगफल की भाँति ही भिन्नों को घटाया जा सकता है, आओ ज्ञात करते हैं –

उदाहरण 4 $\frac{7}{8}$ में से $\frac{5}{8}$ को घटाइए।

$$= \frac{7}{8} - \frac{5}{8}$$

$$= \frac{7-5}{8}$$

$$= \frac{2}{8}$$

$$= \frac{1}{4}$$

उदाहरण 5 $\frac{4}{5}$ में से $\frac{3}{7}$ को घटाइए।

$= \frac{4}{5} - \frac{3}{7}$ हर 5 व 7 का लघुतम समापवर्त्य (L.C.M.) लेते हैं जो कि 35 है।

$$= \frac{(4 \times 7) - (3 \times 5)}{35}$$

$$= \frac{28-15}{35}$$

$$= \frac{13}{35}$$

उदाहरण 6 $8\frac{1}{4}$ में से $2\frac{1}{5}$ को घटाइए।

$$8\frac{1}{4} - 2\frac{1}{5}$$

$$= \frac{33}{4} - \frac{11}{5}$$ हर 4 व 5 का LCM = 20 है।

$$= \frac{33 \times 5 - 11 \times 4}{20}$$

$$= \frac{165 - 44}{20}$$

$$= \frac{121}{20} = 6\frac{1}{20}$$

5.1.3 भिन्न संख्याओं का गुणा

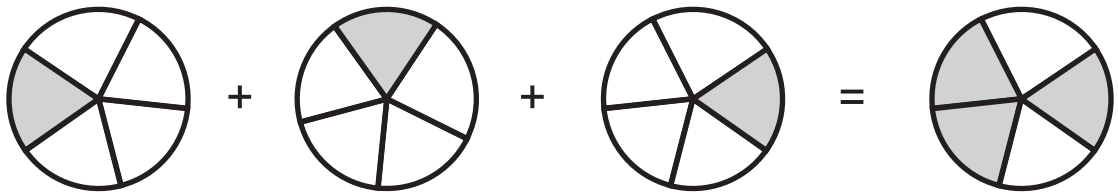
आप जानते हैं कि आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई से ज्ञात किया जाता है परन्तु यदि लम्बाई या चौड़ाई भिन्न संख्याओं में दी गई हो तो क्षेत्रफल किस प्रकार ज्ञात करेंगे ? आइए, भिन्न संख्याओं का गुणा किस प्रकार किया जाता है, इसकी जानकारी प्राप्त करते हैं।

एक–भिन्न का पूर्ण संख्या से गुणा

यदि हमें संख्या 3 का गुणा भिन्न $\frac{1}{5}$ से करना है अर्थात् $\frac{1}{5}$ को 3 बार जोड़ना है

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{1+1+1}{5} = \frac{3 \times 1}{5} = \frac{3}{5}$$

आलेख निरूपण में

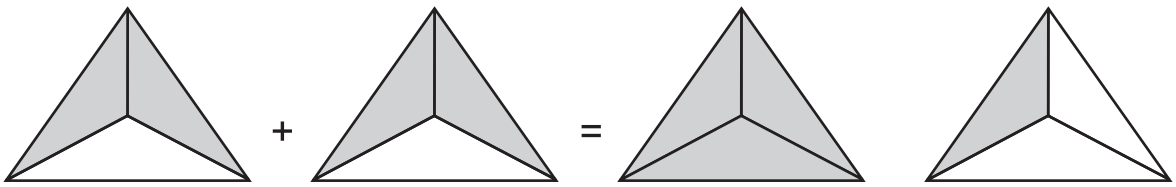


$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3 \times 1}{5} = \frac{3}{5}$$

इसी प्रकार

$$2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2+2}{3} = \frac{2 \times 2}{3} = \frac{4}{3} \text{ या } 1\frac{1}{3}$$

आलेखीय निरूपण में –



$$\frac{2}{3} \qquad \frac{2}{3} = 1 + \frac{1}{3} = 1\frac{1}{3}$$

इसी प्रकार $\frac{2}{5} \times 2 = \frac{2 \times 2}{5} = \frac{4}{5}$

इसी प्रकार अनुचित भिन्न के लिए भी

$$\frac{1}{4} \times 5 = \frac{1 \times 5}{4} = \frac{5}{4} \text{ या } 1\frac{1}{4}$$

इसलिए 5 का $\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ है और $5 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

इस प्रकार हम देखते हैं कि ''का'' गुणन को निरूपित करता है।

उदाहरण 7 5 का $\frac{1}{2}$

$$= 5 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{5}{2}$$

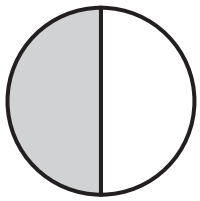
$$= 2\frac{1}{2}$$

भिन्नों का भिन्नों से गुणा

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ से अर्थात $\frac{1}{2}$ का $\frac{1}{3}$

सर्वप्रथम किसी सम्पूर्ण का $\frac{1}{2}$ भाग ज्ञात करते हैं जो कि छायांकित भाग का रूप में दर्शाता है।

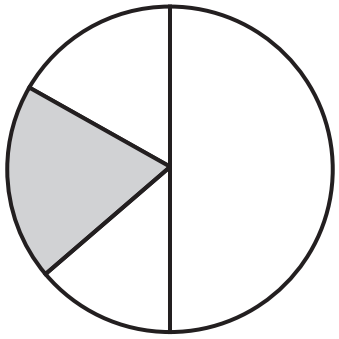
$\frac{1}{2}$ →



अब छायांकित भाग का $\frac{1}{3}$ भाग कैसे ज्ञात करेंगे ? इस छायांकित ($\frac{1}{2}$ भाग) को पुनः 3 समान भागों में विभाजित करके उसमें से 1 भाग लेंगे,

जो कि $\frac{1}{2}$ का $\frac{1}{3}$ होगा। हम जानते हैं कि

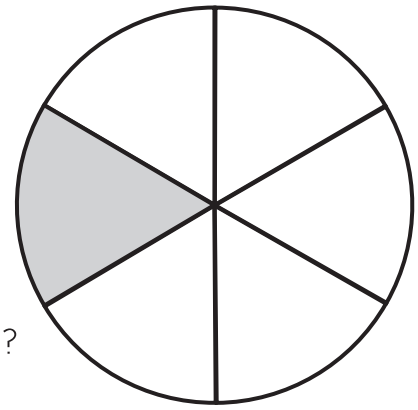
$$\frac{1}{2} \text{ का } \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$$



चित्र में छायांकित भाग $\frac{1}{2}$ के $\frac{1}{3}$ को निरूपित करता है

अतः यदि इसी छायांकित भाग की तरह की अछायांकित भाग को विभाजित करेंगे तो पूरी इकाई के छः समान भाग हो जाते हैं और छायांकित भाग का पूरी इकाई का छठवाँ भाग है। अतः छायांकित भाग = $\frac{1}{6}$

इस प्रकार $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$



इसे निम्न प्रकार भी ज्ञात किया जा सकता है।

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1 \times 1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$$

इसी प्रकार $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ ज्ञात कीजिए देखिए क्या उत्तर समान है ?

अतः $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

उदाहरण 8 केशू के पास 25 रूपये है, वह अपने धन का $\frac{2}{5}$ भाग कॉपी–पेन खरीदने पर खर्च करता है, तो उसने कितने रूपये खर्च किए ?

हम जानते है कि ''का'' गुणन को दर्शाता है।

इसलिए केशू ने कॉपी–पेन खरीदने पर खर्च किए –

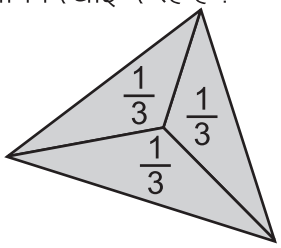
$$25 \text{ का } \frac{2}{5} = 25 \times \frac{2}{5}$$

$$= \frac{25 \times 2}{5}$$

$$= 5 \times 2$$

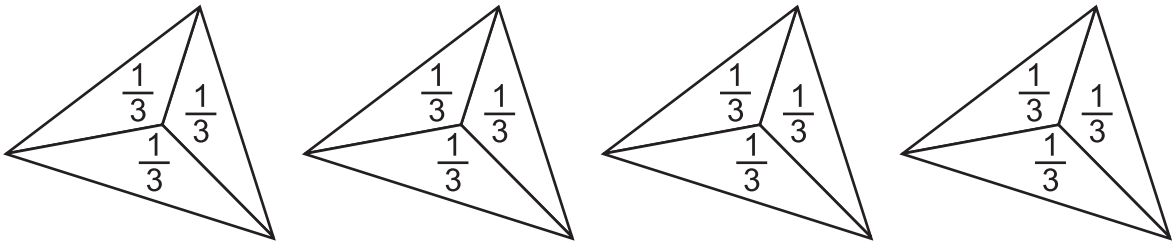
$$= 10 \text{ रूपये}$$

5.1.4 भिन्न संख्या का भाग भागक्रिया गुणन क्रिया का विपरीत भाग होता है। जैसे $1 \div \frac{1}{3}$ ज्ञात करते हैं इसका अर्थ है कि 1 में $\frac{1}{3}$ कितनी बार है। आपको दिए चित्र में कितने $\frac{1}{3}$ भाग दिखाई दे रहे हैं ?



1 में ऐसे $\frac{1}{3}$ के तीन भाग है अतः $1 \div \frac{1}{3} = 3$

इस प्रकार $4 \div \frac{1}{3}$ अर्थात 4 सम्पूर्ण में से प्रत्येक को समान $\frac{1}{3}$ भागों में बाँटने पर $\frac{1}{3}$ भागों की संख्या = 12 होगी।



अर्थात् $4 \div \frac{1}{3} = 12$ साथ ही $4 \div \frac{1}{3} = 4 \times \frac{3}{1} = 12$

इसी प्रकार आप $3 \div \frac{1}{5}$ व $5 \div \frac{1}{3}$ भाग ज्ञात कीजिए।

5.1.5 भिन्नों का व्युत्क्रम : यदि भिन्न $\frac{1}{4}$ के अंश व हर को परस्पर बदलने पर $\frac{4}{1}$ प्राप्त होता है। इसी प्रकार आप $\frac{1}{3}$ और $\frac{2}{5}$ के अंश व हर को परस्पर बदलिए।

जैसे $\frac{1}{4} \times \frac{4}{1} = 1$, $\frac{1}{3} \times \frac{3}{1} =$ ----- , $\frac{2}{5} \times \frac{5}{2} =$ -----

ऐसी शून्येत्तर ($\neq 0$) संख्याएँ जिनका परस्पर गुणनफल 1 है एक दूसरे के व्युत्क्रम कहलाते हैं।

$1 \div \frac{1}{3} = 1 \times \frac{3}{1} = 1 \times \left(\frac{1}{3} \text{ व्युत्क्रम}\right)$

$5 \div \frac{3}{2} = 5 \times \frac{2}{3} = 5 \times \left(\frac{3}{2} \text{ का व्युत्क्रम}\right)$

$2 \times \frac{3}{4} = 2 \times \text{---} = \text{----------}$

उदाहरण 9 $\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$ को हल कीजिए।

$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{5} \text{ का व्युत्क्रम}\right)$

$= \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{6}$

उदाहरण 10 $2\frac{1}{5} \div 1\frac{1}{2}$ को हल कीजिए।

$= \frac{11}{5} \div \frac{3}{2}$

$= \frac{11}{5} \times \left(\frac{3}{2} \text{ का व्युत्क्रम}\right)$

$= \frac{11}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{22}{15} = 1\frac{7}{15}$

प्रश्नावली 5.1

1. गुणा करके सरलतम रूप में लिखिए।

   (i) $8 \times \frac{3}{5}$ (ii) $15 \times \frac{3}{5}$ (iii) $2\frac{2}{3} \times \frac{6}{7}$ (iv) $\frac{4}{5} \times \frac{12}{7}$

2. ज्ञात कीजिए।

   (i) 27 का $\frac{1}{3}$ (ii) 24 का $\frac{3}{4}$ (iii) $3\frac{2}{5}$ का $\frac{8}{17}$ (iv) $\frac{3}{10}$ का $\frac{1}{7}$

3. निम्नलिखित भिन्नों में से प्रत्येक का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।

   (i) $\frac{3}{7}$ (ii) $\frac{13}{8}$ (iii) $\frac{6}{5}$

4. ज्ञात कीजिए।

   (i) $\frac{7}{3} \div \frac{7}{8}$ (ii) $\frac{6}{13} \div \frac{5}{13}$ (iii) $3\frac{1}{2} \div 4$ (iv) $3\frac{1}{5} \div 2\frac{1}{3}$

5.2 दशमलव संख्याओं को पढ़ना

(i) 3.62 = तीन दशमलव छः दो

(ii) 18.078 = अठारह दशमलव शून्य सात आठ

यहाँ दशमलव के बाद अंकों को एक–एक करके बोलते हैं।

5.2.1 दशमलव में स्थानीयमान

संख्याओं में बाई ओर से दाई ओर जाने पर स्थानीयमान क्रमशः $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ भाग होता जाता है जिन्हें क्रमशः दशांश, शतांश व सहस्रांश कहते है। शतांश, दशांश का $\frac{1}{10}$ वाँ भाग व सहस्रांश, शतांश का $\frac{1}{10}$ वाँ भाग होता है।

जैसे 24.817

2 का स्थानीयमान = 20

4 का स्थानीयमान = 4

8 का स्थानीयमान = $\frac{8}{10}$

1 का स्थानीयमान = $\frac{1}{100}$

7 का स्थानीयमान = $\frac{7}{1000}$

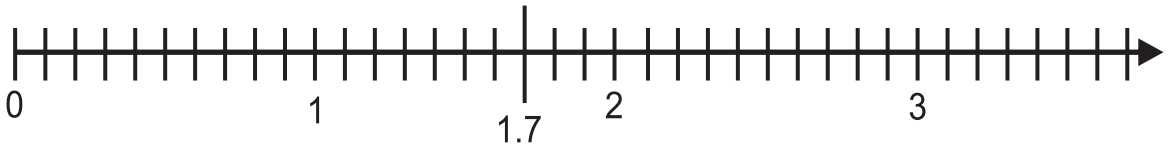
यहाँ 8 दशांश, 1 शतांश व 7 सहस्रांश है।

5.2.2 दशमलव संख्याओं का विस्तार रूप

(i) 32. 246 = $30 + 2 + \frac{2}{10} + \frac{4}{100} + \frac{6}{1000}$

(ii) 125. 07 = $100 + 20 + 5 + \frac{0}{10} + \frac{7}{100}$

5.2.3 दशमलव का संख्या रेखा पर निरूपण



यहाँ 0 से 1 के बीच 10 समान हिस्से होते हैं।

1.7 के लिए 1 के बाद 7 हिस्से गिनते हैं।

5.3 दशमलव रूप में लिखना

(i) 8 दहाई 3 इकाई 2 दशांश 1 शतांश

$$= 80 + 3 + \frac{2}{10} + \frac{1}{100} = 83.21$$

(ii) $500 + 30 + 8 + \frac{7}{10} + \frac{3}{100} + \frac{9}{1000} = 538.739$

यहाँ दशांश को दशमलव के बाद पहले स्थान पर, शतांश को दूसरे स्थान पर व सहस्रांश को तीसरे स्थान में लिखते हैं।

5.4 दशमलव को भिन्न में बदलना

संख्या को दशमलव रूप से भिन्न रूप में लिखने के लिए दशमलव हटा कर हर में उसके स्थान पर एक व दशमलव के आगे जितने अंक हो उतने शून्य लगाते हैं।

(i) $25.5 = \frac{25.5}{10} = \frac{255}{10} = \frac{5 \times 51}{5 \times 2} = \frac{51}{2}$

(ii) $0.8. = \frac{0.8}{10} = \frac{8}{10} = \frac{2 \times 4}{2 \times 5} = \frac{4}{5}$

5.5 भिन्नों को दशमलव में बदलना

यहाँ भिन्नों के हर को 10 या 10 के गुणज में बदलते हैं

(i) $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10} = 0.6$

(ii) $\frac{2}{25} = \frac{2 \times 4}{25 \times 4} = \frac{8}{100} = 0.08$

5.6 दशमलवों की तुलना

(i) ज्ञात करो 3.6, 3.06 में कौन बड़ा है ? संख्याओं की तुलना बाईं ओर से अंको की तुलना करना शुरू करते हैं, उसी प्रकार दशमलव संख्याओं में पहले दशांश फिर शतांश अंको की तुलना करते हैं।

अतः 3.6 > 3.06 क्योंकि 6 > 0

अभ्यास 5.2

1. दशमलव रूप में लिखिए।

(i) 7 दशांश (ii) छः सौ दशमलव तीन

(iii) चौदह दशमलव नौ (iv) 5 दशांश

2. दशमलव भिन्न के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $4 + \frac{8}{10}$ (ii) $300 + 50 + 8 + \frac{1}{10}$

(ii) $\frac{3}{2}$ (iii) $3\frac{3}{5}$ (iv) $700 + 3 + \frac{5}{10} + \frac{3}{100}$

3. संख्या रेखा पर दर्शाइए।

(i) 0.5 (ii) 4.9 (iii) 3.8

4. कौनसी संख्या बड़ी है ?

(i) 0. 4 या 0. 04 (ii) 5. 64 या 5. 603

5. सरल भिन्न रूप में लिखिए।

(i) 0.18 (ii) 0.25 (iii) 6.01

5.7 दशमलव संख्याओ की तुलना जोड़ एवं घटाव

इन दशमलव संख्याओ को देखकर बताइए कि कौनसी संख्या बड़ी है ?

(i) 38.750, 38.075 (ii) 262.327, 362.372

(i) 38.750 > 38.075

इन संख्याओं में दशमलव के पहले संख्या दोनों में बराबर है परन्तु दशमलव के बाद दशांश, शतांश इत्यादि को देखते हैं यहाँ 7 > 0 है अतः 38.750 संख्या बड़ी होगी।

(ii) 262.372 < 362.372

यहाँ दशमलव के पहले की संख्या में अन्तर है।

362 > 262 अतः 362. 372 संख्या बड़ी है।

5.8 छोटी इकाइयों को बड़ी इकाइयों में बदलना

मुद्रा, लम्बाई और भार की छोटी इकाई को बड़ी इकाई में बदलने के लिए दशमलव का प्रयोग करते हैं। 1 क्रिग्रा = 1000 ग्राम, 1 रूपये = 100 पैसे, 1 मीटर = 100 सेमी, 1 किमी = 1000 मीटर होता है।

जैसे – 24 ग्राम $= \frac{24}{1000}$ किग्रा = 0. 024 किग्रा

550 पैसे $= \frac{550}{100}$ रूपये = 5. 50 रूपये

1 मीटर 20 सेमी $= 1 + \frac{20}{100} = 1 + 0.20 = 1.20$ मीटर

125 सेमी $= \frac{125}{100} = 1.25$ मीटर

अतः ग्राम को किग्रा में, मीटर को किमी में बदलने के लिए 1000 का भाग एवं पैसे को रूपये में, सेमी को मीटर में बदलने के लिए 100 का भाग देकर दशमलव भिन्न में बदलते हैं।

5.9 दशमलव की जोड़ एवं घटाव

उदाहरण 11 घीसू ने एक टोकरी में 12 किग्रा 400 ग्राम अमरूद व अन्य टोकरी में 6 किग्रा 750 ग्राम जामुन रखे है। शहर ले जाते समय उसे कुल कितना वजन उठाना पड़ेगा।

(i) सर्वप्रथम इकाई समान करेंगे –

12 किग्रा 400 ग्राम $= 12 + \frac{400}{1000} = 12.400$ किग्रा

6 किग्रा 750 ग्राम $= 6 + \frac{750}{1000} = 6.750$ किग्रा

अब दोनों को जोड़ते हैं और इस प्रकार लिखते हैं।

अमरूद का वजन	=	12.400 किग्रा
जामुन का वजन	= +	6.750 किग्रा
कुल वजन	=	19.150 किग्रा

उदाहरण 12 48 किमी से 42.7 किमी कितना कम है ?

	48.00 किमी
–	42.7 किमी
	05.30 किमी

प्रश्नावली 5.3

1. संख्याओं में तुलना कर बताइए कौनसी संख्या बड़ी है ?

   (i) 35.37 और 35.07 (ii) 262.327 और 262.562
   (iii) 0.7 और 0.07 (iv) 7 और 0.7 (v) 85.2 और 85.02

2. दुर्गा और विमला ने सलवार सूट बनवाने के लिए 5 मीटर 25 सेमी कपड़ा खरीदा। यदि दुर्गा के सूट बनाने में 2 मीटर 75 सेमी कपड़े की जरूरत पड़ी तो बताइए विमला के सूट के लिए कितना कपड़ा बचा?

3. राजू अपने गाँव कुराबड़ से 7 किग्रा 250 ग्राम हरी मिर्च, 15 किग्रा 750 ग्राम टमाटर और 950 ग्राम धनिया लाया तो बताइए कुल कितने किलोग्राम सब्जी लाया ?

4. अनिता के बैंक खाते में ब्याज के 37.25 रूपये जमा हुए और भावना के बैंक खाते में ब्याज के 25.50 रूपये जमा हुए बताइए किसे अधिक ब्याज मिला और कितना अधिक ?

5.10 दशमलव संख्याओं का गुणन

उदाहरण 13 (i) 0.1×0.1 का मान ज्ञात कीजिए।

सर्वप्रथम दशमलव संख्या को साधारण भिन्न में बदलकर अंश को अंश से व हर को हर से गुणा करेंगे।

$$\frac{0\overset{1}{\cancel{1}}}{10} \times \frac{0\overset{1}{\cancel{1}}}{10} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1 \times 1}{10 \times 10} = \frac{1}{100} = 0.01$$

(ii) 0.3×0.25

$$\frac{0\overset{3}{\cancel{3}}}{10} \times \frac{0\overset{25}{\cancel{25}}}{100} = \frac{3}{10} \times \frac{25}{100} = \frac{3 \times 25}{10 \times 100} = \frac{75}{1000} = 0.075$$

(उत्तर को दशमलव में लिखने के लिए हर में जितने शून्य होते है अंश में उतने ही अंको के लिए संख्या के आगे शेष शून्य लगाकर इकाई से गिनकर दशमलव लगाते हैं)

(iii) 3.7×5

$$\frac{3\overset{7}{\cancel{7}}}{10} \times \frac{5}{1} = \frac{37 \times 5}{10 \times 1} = \frac{185}{10} = 18.5$$

(यहाँ हर में एक शून्य है परन्तु अंश में तीन अंको की संख्या है अतः इकाई से गिनकर दशमलव लगाते हैं)

(iv) 3×3.5

$$= \frac{3}{1} \times \frac{3\overset{5}{\cancel{5}}}{10} = \frac{3 \times 35}{1 \times 10} = \frac{105}{10} = 10.5$$

(v) 1.52×100

$$= \frac{1\overset{52}{\cancel{52}}}{100} \times \frac{100}{1} = \frac{15200}{100} = 152.00$$

प्रश्नावली 5.4

1. गणेशी प्रतिदिन 7.5 किग्रा गेहूँ साफ करती है 10 दिन में वो कितने गेहूँ साफ कर लेगी ?
2. एक आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी लम्बाई 6.4 सेमी व चौड़ाई 3.2 सेमी है।
3. ज्ञात कीजिए।

   (i) 1.08 × 10 (ii) 0.08 × 0.5 (iii) 101.01 × 0.01

   (iv) 20.05 × 4.8 (v) 0.6 × 100

5.11 दशमलव संख्याओं का भाग

(i) दशमलव भिन्न में पूर्ण संख्या से भाग

उदाहरण 14 8.4 ÷ 2

$$= \frac{8\overset{\frown}{4}}{10} \div \frac{2}{1}$$

$$\frac{84}{10} \times \frac{2}{1} = \frac{84 \times 1}{10 \times 2} = \frac{42}{10} = 4.2$$

यहाँ भाग के लिए 2 के व्युत्क्रम से गुणा करना पड़ेगा।

(ii) 45.32 ÷ 10

$$= \frac{45\overset{\frown}{32}}{100} \div \frac{10}{1} = \frac{4532}{100} \times \frac{1}{10} = \frac{4532}{1000} = 4.532$$

(यहाँ $\frac{10}{1}$ का व्युत्क्रम $\frac{1}{10}$ है)

(iii) 1.03 ÷ 1000

$$= \frac{1\overset{\frown}{03}}{100} \times \frac{1000}{1} = \frac{103}{100} \times \frac{1}{1000} = \frac{103}{100000} = .00103$$

(ii) किसी पूर्ण संख्या में दशमलव भिन्न से भाग

उदाहरण 15 (i) 32 ÷ 0.4

$$= \frac{32}{1} \div \frac{0\overset{\frown}{4}}{10} = \frac{32}{1} \div \frac{4}{10} = \frac{32}{1} \times \frac{10}{4}$$

$$= \frac{32 \times 10}{4} = \frac{(8 \times 4) \times 10}{4} = 8 \times 10$$ (यहाँ $\frac{4}{10}$ व्युत्क्रम $\frac{10}{4}$ है)

(ii) $7 \div 1.6$

$$= \frac{7}{1} \div \frac{16}{10} = \frac{7}{1} \div \frac{16}{10} = \frac{7}{1} \times \frac{10}{16} = \frac{7}{1} \times \frac{5}{8}$$

$$= \frac{7 \times 5}{1 \times 8} = \frac{35}{8} = 4.375$$ (यहाँ 35 में 8 का भाग लगाते हैं)

(iii) किसी दशमलव संख्या में दशमलव संख्या से भाग

उदाहरण 16 (i) $3.25 \div 0.5$

$$= \frac{325}{100} \div \frac{5}{10} = \frac{325}{100} \div \frac{5}{10}$$

$$= \frac{325}{100} \times \frac{10}{5} = \frac{325 \times 10}{100 \times 5} = \frac{65}{10} = 6.5$$

(ii) $37.8 \div 0.14$

$$= \frac{378}{10} \div \frac{14}{100} = \frac{378}{10} \div \frac{14}{100}$$

$$= \frac{378}{10} \times \frac{100}{14} = \frac{(27 \times 14) \times 100}{14 \times 10} = 27 \times 10 = 270$$

(iii) एक कार 2.2 घन्टे में 89.1 किमी दूरी तय करती है तो कार द्वारा 1 घण्टे में तय दूरी ज्ञात कीजिए।

2.2 घन्टे में कार द्वारा तय की गई दूरी = 89.1 किमी

1 घन्टे में कार द्वारा तय की गई दूरी = $89.1 \div 2.2$

$$= \frac{891}{10} \div \frac{22}{10}$$

$$= \frac{891}{10} \div \frac{22}{10} = \frac{891}{10} \times \frac{10}{22} = \frac{891}{22} = 40.5$$ किमी

प्रश्नावली 5.5

1. ज्ञात कीजिए।

   (i) $3.96 \div 6$ (ii) $0.09 \div 3$ (iii) $4.2 \div 10$ (iv) $8.05 \div 100$

   (v) $1.2 \div 0.3$ (vi) $30.75 \div 1.5$ (vii) $7.75 \div 0.25$ (viii) $8.05 \div 0.25$

2. एक स्कूटर 5 लीटर पेट्रोल में 212.5 किमी चल जाता है तो एक लीटर पेट्रोल में कितनी दूरी तय करेगा ?

3. एक आयत का क्षेत्रफल 93.6 वर्ग मीटर है और चौड़ाई 3.6 मी. है तो आयत का परिमाप ज्ञात कीजिए।

अध्याय 6

वर्ग एवं वर्गमूल

6.1 वर्ग संख्या

किसी संख्या का उसी से गुणा करने पर प्राप्त संख्या उस संख्या की वर्ग संख्या कहलाती है। जैसे –

संख्या	वर्ग
1	$1 \times 1 = 1^2 = 1$
2	$2 \times 2 = 2^2 = 4$
3	$3 \times 3 = 3^2 = 9$
4	$4 \times 4 = 4^2 = 16$
5	$5 \times 5 = 5^2 = 25$

संख्याएँ 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 आदि वर्ग संख्याएँ है तथा इन्हें पूर्ण वर्ग संख्याएँ भी कहते हैं।

निम्न संख्याओं के वर्गों के बारे में विचार कीजिए एवं रिक्त स्थानों को भरिए –

संख्याएँ	वर्ग	संख्याएँ	वर्ग
1	1	11	121
2	4	12	---
3	9	13	169
4	---	14	---
5	25	15	225
6	36	16	---
7	---	17	289
8	64	18	---
9	---	19	---
10	100	20	400

6.1.2 वर्ग संख्याओं के गुणधर्म

उक्त तालिका से स्पष्ट है कि –

1. संख्याएँ जिनके इकाई का अंक 2, 3, 7, 8 हो वे वर्ग संख्याएँ नहीं हो सकती है।
2. सम संख्याओं के वर्ग सम संख्या तथा विषम संख्याओं के वर्ग विषम संख्या प्राप्त होती है।

प्रश्नावली 6.1

1. दी गई संख्याओं के वर्ग ज्ञात कीजिए।

   (a) 18 (b) 24 (c) 50 (d) 100

2. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गों के इकाई अंक लिखिए।

   (a) 55 (b) 1023 (c) 221 (d) 5678

3. निम्न में से कौनसी संख्याओं का वर्ग सम संख्या होगा ?

   (a) 396 (b) 235 (c) 5508 (d) 107

4. अनुमान लगाकर बताइए निम्न में से कौनसी संख्या पूर्ण वर्ग नहीं है ?

   (a) 48 (b) 81 (c) 102 (d) 24636

6.2 वर्गमूल

निम्न वर्ग संख्याओं पर विचार कीजिए –

$$(4)^2 = 4 \times 4 = 16$$
$$(5)^2 = 5 \times 5 = 25$$

इसे हम इस प्रकार भी कह सकते है

16 संख्या 4 का वर्ग है।

25 संख्या 5 का वर्ग है।

अर्थात वर्ग जिस संख्या से बना है। वह संख्या उस वर्ग की वर्गमूल कहलाती है।

अतः वर्गमूल वर्ग की प्रतिलोम संक्रिया है।

वर्गमूल को $\sqrt{}$ ''करणी चिह्न'' द्वारा दर्शाते हैं।

जैसे– 81 का वर्गमूल $\sqrt{81} = 9$

121 का वर्गमूल $\sqrt{121} = 11$

6.2.1 अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा वर्गमूल ज्ञात करना

नीचे कुछ संख्याओं तथा उनके वर्गों के गुणनखण्ड दिए गए हैं।

आप पाएँगे कि संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड ही उसके वर्ग के अभाज्य गुणनखण्ड में दो बार आते हैं, जैसे 6 के अभाज्य गुणनखण्ड 2 व 3 है तो इसके वर्ग संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड में 2×2 तथा 3×3 आ रहे हैं।

इसके विपरीत वर्गमूल में अभाज्य गुणनखण्ड की संख्या उनके वर्ग के अभाज्य गुणनखण्ड की संख्या की आधी होती है।

संख्या	संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड	वर्ग संख्या	वर्ग संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड
6	2 x 3	36	2 x 2 x 3 x 3
8	2 x 2 x 2	64	2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2
12	2 x 2 x 3	144	2 x 2 x 2 x 2 x 3 x 3

आइए हम एक दी गई वर्ग संख्या 144 का वर्गमूल ज्ञात करते है।

2	144
2	72
2	36
2	18
3	9
3	3
	1

$144 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3}$

अभाज्य गुणनखण्ड के युग्म बनाने पर हम पाते है

$144 = (2 \times 2 \times 3)^2$

$\sqrt{144} = 2 \times 2 \times 3$

$\sqrt{144} = 12$

इसी तरह संख्या 192 के अभाज्य गुणनखण्ड पर ध्यान दीजिए।

$192 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

यहाँ सारे गुणनखण्ड युग्म में नहीं है। अतः 192 एक पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है। यदि इसे पूर्ण बनाना है तो या तो 3 से गुणा करना पड़ेगा या 3 से भाग करना पड़ेगा।

$192 \times 3 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3}$

$\sqrt{192 \times 3} = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$\sqrt{576} = 24$

इसी प्रकार $\frac{192}{3} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3}{3}$

$\sqrt{\frac{192}{3}} = 2 \times 2 \times 2 = 8$

उदाहरण 1 संख्या 2500 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए ।

हल

5	2500
5	500
5	100
5	20
2	4
2	2
	1

2500 के अभाज्य गुणनखण्ड

$= \underline{5 \times 5} \times \underline{5 \times 5} \times \underline{2 \times 2}$

$\sqrt{2500} = 5 \times 5 \times 2$

$= 50$

6.2.2 भागफल विधि से वर्गमूल ज्ञात करना

जब संख्याएँ बहुत बड़ी हो तब अभाज्य गुणनखण्ड विधि लम्बी तथा बोझिल हो जाती है। इसके लिए हम भाग विधि का उपयोग कर वर्गमूल ज्ञात करते हैं।

उदाहरण 2 संख्या 576 का वर्गमूल ज्ञात करने के लिए निम्न चरणों पर विचार कीजिए।

हल चरण 1 इकाई स्थान से प्रारम्भ करते हुए 2–2 अंकों का जोड़ा बनाएँगे।

जैसे 576 में $\overline{5}\ \overline{76}$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2 & \overline{5}\ \overline{76} \\ & \underline{4} \\ & 1 \end{array}$$

चरण 2 वह सबसे बड़ी संख्या चुनिए जिसका वर्ग सबसे बाई ओर की संख्या के बराबर अथवा छोटी हो।

अतः हमें 5 से छोटी वर्ग संख्या ढूँढनी है, जो कि 2 है।

$$(2)^2 < 5 < (3)^2$$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2 & \overline{5}\ \overline{76} \\ +2 & \\ \hline 4 & \underline{-4} \\ & 176 \end{array}$$

उस संख्या को भागफल के रूप में ऊपर तथा उसके वर्ग को 5 के नीचे लिखकर घटाएँ।

चरण 3 पुनः शेषफल के आगे अंको का अगला जोड़ा लिखें। जैसे भाग की संक्रिया में करते हैं। (ध्यान रहे भाग में केवल 1 अंक लिखा जाता है, जबकि वर्गमूल में जोड़ा लिखा जाता है।)

चरण 4 भाजक को उसी संख्या में में जोड़कर नीचे लिखिए।

$$\begin{array}{r|l} & 24 \\ \hline 2 & \overline{5}\ \overline{76} \\ +2 & \underline{-4} \\ \hline 44 & 176 \\ +4 & \underline{176} \\ 48 & 0 \end{array}$$

चरण 5 उक्त उदाहरण में भाजक 4 के आगे रिक्त स्थान में एक अंक (0 से 9 के मध्य कोई एक) लिखना होगा जिससे हमारा भाजक (40, 41, 42, ... 49) तक हो सकता है साथ ही हमें वहीं अंक भागफल (0 से 9) में मिलेगा जिसे भागफल में 2 के आगे लिखेंगे। नए भाजक तथा इस अंक (0 से 9) का गुणनफल ऐसी संख्या होनी चाहिए, जो हमारे भाज्य 176 के बराबर या उससे छोटी हो।

चरण 6 इस स्थिति में 44 X 4 = 176 है। अब चूँकि शेषफल 0 है तथा दी गई संख्या में कोई अंक शेष नहीं है, अतः 576 का वर्गमूल = 24 प्राप्त होता है।

उदाहरण 3 संख्या 7056 का वर्गमूल भाग विधि से ज्ञात कीजिए।

हल चरण 1 इकाई से प्रारम्भ करते हुए दो–दो संख्या के जोड़े बनाएँगे।

$\overline{70}\ \overline{56}$

चरण 2 उस सबसे बड़ी संख्या का चयन करते हैं, जिसका वर्ग 70 के बराबर अथवा उससे कम हो।

$(8)^2 < 70 < (9)^2$

इस संख्या को भाजक में तथा इसके वर्ग 64 को 70 के नीचे लिखते हैं।

```
        8
8     | 70 56
+ 8   | 64
16    |   6 56
```

चरण 3 भाजक 8 को पुनः 8 जोड़कर लिखा जाता है और नया भाजक 16 प्राप्त होता है।

चरण 4 अब संख्याओं का अगला जोड़ा 56 उतारते है।
अब हमें नया भाज्य 656 प्राप्त होता है।

```
        8 4
8     | 70 56
+ 8   | -64
164   |   656
4     |  - 656
      |   000
```

चरण 5 पुनः भाजक (16) में रिक्त स्थान हेतु अंक (0–9 के मध्य) का चयन करना होगा,
जो (160, 161, ... 169) तक हो सकती है, तथा उसे उसी अंक से गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल 656 से कम उसके बराबर हो।

जो कि उक्त उदाहरण में 4 होगी क्योंकि $164 \times 4 = 656$ प्राप्त होगा।

अतः 7056 का वर्गमूल = 84 प्राप्त होगा।

6.2.3 वर्गमूल का अनुमान लगाना

(i) वर्गमूल में अंकों की संख्या

निम्न सारणी पर विचार कीजिए –

$1^2 = 1$	$99^2 = 9810$
$9^2 = 81$	$100^2 = 10000$
$10^2 = 100$	$999^2 = 9898001$

1 अंक वाली संख्या के वर्ग में कितने अंक है ? 1 अथवा 2

2 अंकों वाली संख्या के वर्ग में कितने अंक है ? 3 अथवा 4

3 अंकों वाली संख्या के वर्ग में कितने अंक है ?.....

इसके विपरित 1 एवं 2 अंक वाली संख्या के वर्गमूल में 1 अंक होगा। जबकि तीन अंकों वाली संख्या के वर्गमूल में 1 अथवा 2 अंक होंगे। इसी प्रकार आगे भी।

कई बार हमें दैनिक जीवन में वर्गमूल निकालने की आवश्यकता होती है।

एक विद्यालय में 350 बच्चे है। स्वतंत्रता दिवस समारोह में उन्हें वर्गाकार जमावट में खड़ा करना है तथा शेष विद्यार्थी व्यवस्था देखेंगे। ऐसे में हमें पूर्ण संख्या का अनुमान लगाने की आवश्यकता होगी। हम जानते है कि $100 < 350 < 400$ और

$\sqrt{100} = 10$ तथा $\sqrt{400} = 20$

अतः $10 < \sqrt{350} < 20$ लेकिन फिर भी हम वर्ग संख्या के करीब नहीं है। हम जानते हैं कि

$18^2 = 324$ व $19^2 = 361$

अतः $18 < \sqrt{350} < 19$

अतः $\sqrt{350}$ में हम 18 छात्रों की पक्तियाँ बनवा सकते हैं।

प्रश्नावली 6.2

1. निम्न संख्याओं के वर्गमूल में इकाई का अंक क्या हो सकता है ?

   (a) 169 (b) 625 (c) 9604 (d) 65536

2. अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

   (a) 729 (b) 6400 (c) 1296 (d) 4356

3. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल भाग विधि से ज्ञात कीजिए।

   (a) 196 (b) 441 (c) 1225 (d) 4624

4. निम्न संख्याओं के वर्गमूल बिना गणना के ज्ञात कीजिए।

   (a) 4489 (b) 60025

5. निम्न संख्याओं के वर्गमूल में कितने अंक होंगे ?

   (a) 1369 (b) 15376 (c) 6031936